UNIVERZITET U BEOGRADU
FIZIČKI FAKULTET

Ivan V. Aničin

OBRADA REZULTATA MERENJA

KOMPENDIJUM FIZIČKE PROPEDEVTIKE

treće ispravljeno izdanje

FIZICKI FAKULTET

BEOGRAD 2004

PREDGOVOR

Knjižica koja je pred vama predstavlja treće, popravljeno i dopunjeno izdanje prvog izdanja koje je u verziji pisanoj rukom više od deset godina cirkulisalo među studentima. Namera izdavača bila je da se ovo izdanje pripremi u normalnoj štampanoj tehnici. Međutim, već posle pregleda prvih desetak strana urađenih na ovaj način, a pod pritiskom svih konsultovanih njenih dosadašnjih korisnika, odustao sam od promene tehnike i rešio da se pojavi u ovoj hibridnoj formi. Ispostavilo se da štampana tehnika ne podnosi stilske slobode, kolokvijalizme i skraćenice, koje su inače neuobičajene za stručni tekst, ali su pisanoj verziji davale pored određenog šarma i izrazito mali obim - pored toga što bi izgubila svojevrsnu draž štampana verzija bi, naime, nužno morala da ima i bitno veći broj strana. Pored niza manjih izmena glavne iamene i dopune učinjene su u tretmanu slučajnih grešaka i metoda najmanjih kvadrata. Dodati su i tekstovi uglednih zadataka sa pismenih ispita, sa potpunim rešenjima.

Obrada rezulatata merenja je deo teorije merenja, ili bolje reći prakse merenja, koji ima zadatak da iz tzv. sirovih podataka, tj. na osnovu stanja mernih instrumenata, čiji su odnosi sa ispitivanim sistemom osmišljeni u okviru datog eksperimenta, odredi intervale u kojima se, sa određenom verovatnoćom, nalaze brojne vrednosti fizičkih veličina koje opisuju stanje ispitivanog sistema. To je, dakle, niz procedura pomoću kojih se dolazi do konačnog skupa brojeva koji opisuju konkretno stanje datog fizičkog sistema, tj. do konačne kvantifikacije znanja. Time stižemo do jednoznačnog, reproducibilnog i objektivnog znanja o prirodi i u toj svojoj završnoj fazi eksperiment kulminira.

Obrada rezultata stoga uvek mora da poštuje očigledno neophodan i dovoljno strogi opšti kodeks a sa druge strane u detaljima zavisi od specifičnih osobina ispitivanog sistema, mernih instrumenata, i njihovih interakcija. Kurs je zato podeljen na dva dela. U prvom se govori o opštim osobinama merenja i eksperimenata relevantnim za pojavu sistematskih i slučajnih grešaka i o osnovnim faktorima koji utiču na vrednosti ovih grešaka merenja, odnosno na tačnost rezultata. Drugi deo je posvećen izgrađivanju svesti o značaju i potrebi jasne i kanonizovane obrade i prezentacije eksperementalnih rezultata a zatim postupcima i pravilima obrade podataka koja pokrivaju najčešće eksperimentalne situacije. Kroz sve ovo trudio sam se da razvijem osnovnu ideju da se obrada rezultata, osim svaki put specifičnih čisto matematičkih operacija sa rezultatima, sastoji na prvom mestu od sagledavanja svih mogućih grešaka u merenju, zatim eliminacije i/ili korekcije nekih od njih, i konačno prikazivanja preostalih. Pritom sam koliko god je to moguće izbegavao matematičku strogost a naglašavao fizički smisao formalizama. Ovo tim pre što se u međuvremenu na srpskom jeziku pojavila izvrsna knjiga J.Slivke i M.Terzić ("Obrada rezultata fizičkih eksperimenata", Stylos, Novi Sad 1995) koju najtoplije preporučujem kao komplement ovom kursu.

Dodaci sadrže materijal koji većim delom nije obavezan za studente prvog semestra. Tu je niz nešto složenijih pojmova iz obrade rezultata merenja uveden intuitivno i objašnjen uglavnom kvalitativno. Namera je da se kurs, kako nastava iz ove oblasti bude napredovala, pomera sve dublje u Dodatke. Oni, osim toga, treba da budu od koristi i na kasnijim godinama studija. Primena kompjutera u obradi rezultata merenja (ni *off-line* a pogotovo ne *on-line*) ovde praktično nije ni dotaknuta - to bi morao biti predmet celog nezavisnog kursa. U ovom kursu akcent je na razumevanju korišćenih algoritama a ne na tehnici egzekucije. Paket jednostavnih i neposredno primenjljivih BASIC programa samo treba da nagovesti značaj kompjuterske revolucije u obradi rezultata. Izvesna pažnja je, međutim, posvećena korišćenju programa za statističku obradu podataka koji su ugrađeni u *scientific calculator-e*, koji već neopisivo olakšavaju laboratorijsku svakodnevicu u odnosu na ne tako davno vreme "šibera", logaritamskih tablica i elektromehaničkih računskih mašina. Drugog merila ispravnosti konačno dobijenih brojeva, međutim, osim ličnog osećanja eksperimentatora, nema. Zadaci, problemi i pitanja zato treba da pomognu u razvijanju neophodnog osećanja za numeriku i brzu procenu redova veličina.

Ovaj kurs se formirao tokom dvadesetpet godina predavanja za studente I semestra na Univerzitetima u Novom Sadu i Beogradu ali se u izvesnom smislu još uvek može smatrati eksperimentalnim te kao takav nije bez (eksperimentalnih) grešaka. Budući rad na njemu treba da ove greške smanji, odnosno poboljša konačni rezultat. Kolega Igor Stojanović je učeći pažljivo pročitao deo skripata koji se koristi tokom I semestra i otkrio niz grešaka, koje su potom u ovom izdanju ispravljene. Zahvaljujem mu se na tome. Svaka buduća pomoć u tom smislu je dobrodošla.

Ivan V. Aničin

Beograd, Avgust 2004.

SADRŽAJ:

Ne želimo samo da saznamo kako je ustrojena priroda i kako se odvijaju prirodne pojave, već i da po mogućstvu dostignemo cilj, koji može izgledati utopistički i drzak, da saznamo zašto je priroda baš ovakva, a ne nekakva drugačija.
A. Einstein

„У природи има више предмета и дејствија него у језику речи" Ј. Стерија Поповић „Даворје" 1848

1. POJMOVI KOJIMA FIZIKA OPERIŠE I SISTEM ZNANJA IZGRAĐEN NA NJIMA

Fizika se bavi proučavanjem osobina i ponašanja fizičkih sistema - dobro definisanih izolovanih delova prirode. Ostatak sveta zove se okolinom. Fizički sistemi mogu biti zatvoreni, kada su zatvoreni uzajamnim interakcijama delova sistema, i otvoreni, kada interaguju sa okolinom (Primeri: telo na strmoj ravni, telo koje pada, dve naelektrisane kugle, gas u cilindru sa klipom, atom, molekul, planeta, zvezda, itd). Svaki fizički sistem se opisuje određenim brojem adekvatno odabranih i višestrano precizno definisanih fizičkih veličina. Stanje sistema tada je potpuno i jednoznačno opisano vrednostima tih fizičkih veličina. Svakoj fizičkoj veličini pridružuju se određeni simbol i ime. Pod tim simbolom i imenom se podrazumeva i skup definisanih operacija na sistemu koje konačno dovode do pridruživanja određene brojne vrednosti toj fizičkoj veličini, odnosno simbolu (u svakoj konkretnoj situaciji). Ova procedura pridruživanja brojnih vrednosti fizičkim veličinama naziva se **merenjem**. Veze među fizičkim veličinama sada mogu da se izraze matematikom; simboli mogu da ulaze u matematičke izraze i dalje da se sa njima postupa po pravilima matematičke logike $\Rightarrow$ U suštini:

FIZIKA JE OPISIVANJE PRIRODE BROJEVIMA.

Otud se i brojevima koji su rezultati merenja posvećuje maksimalna pažnja. Sada je moguće nalaženje novih relacija i analiza poznatih i pretpostavljenih situacija čisto matematičkim putem. Ovo je zasnovano na činjenici da već intuitivno opažamo da se pojave odvijaju pravilno i reproducibilno (Newton: "Prinuđeni smo da istim uzrocima pripisujemo iste pojave"). Fizika samo kvantificira ove pravilnosti i rezultat te procedure su fizički zakoni i teorije, kanonične i univerzalne istine o ponašanju prirode. Prirodu možemo razložiti na konačan broj različitih tipova fizičkih sistema. Skup svih fizičkih veličina je potpun, tj. dovoljan za opisivanje stanja i ponašanja svih fizičkih sistema a verujemo da predstavlja i najmanji potreban broj fizičkih veličina (mada se i danas uvode nove fizičke veličine - kvantni brojevi za elementarne čestice, itd - koje su obično sve apstraktnije i apstraktnije).

Samo decu i naučnike zanimaju svakodnevne pojave na koje su inače svi navikli ("Sili v prirode", Grigorjev i Mjakišev, Nauka, Moskva 1983

2. POTPUN SKUP ZNANJA U FIZICI - EKSPERIMENT I TEORIJA

Fizika je jedinstvena ali se zbog specifičnosti znanja, veština i sklonosti (a već i zbog ogromnog obima) aktivni fizičari dele na eksperimentalne i teorijske fizičare. Eksperimentalci treba da su u stanju da svaki fizički sistem pripreme u željenom stanju, da pridruže brojne vrednosti svim relevantnim fizičkim veličinama, da ih kontrolišu i da im po želji menjaju vrednosti u željenim opsezima, i da kvantifikuju opažene promene. Eksperiment zahteva usmerenu delatnost eksperimentatora operacionog karaktera, sa merenjem kao najvažnijim delom, u koju je uključeno celokupno dotadašnje i eksperimentalno i teorijsko znanje o datom sistemu. Znanje o datom sistemu je potpuno tek kada imamo rezultate merenja sa opisanim skupom operacija koje su do tih brojeva dovele. To su onda eksperimentalni rezultati.

Teoretičari treba da su u stanju da ovim putem otkrivene pravilnosti pretvore u matematičke veze između simbola za fizičke veličine, da što više takvih veza objedine u kompaktnu fizičku teoriju i da na osnovu otkrivenih matematičkih relacija među fizičkim veličinama eventualno otkriju - predvide nove pravilnosti u ponašanju klase sistema opisanih datom teorijom. Eksperimentalci opet treba da utvrde koji se sve realni sistemi ponašaju po ovako otkrivenim pravilnostima - tj. da utvrde granice važenja fizičkih teorija po dva osnovna pitanja:

a) za koje konkretne sisteme data teorija važi ili ne važi, i
b) u kojim opsezima vrednosti relevantnih fizičkih veličina data teorija važi ili ne, odnosno koja stanja datog sistema opisuje ili ne.

Svo, na ovaj način već razvijeno i provereno znanje fizike prelazi u vlasništvo tehnike (umeće dovođenja svakog fizičkog sistema u dato stanje koje je unapred zahtevano nekom praktičnom potrebom) i tehnologije (umeće racionalne masovne proizvodnje sistema željenih osobina). Razvoj tehnike i tehnologije zahtevan je praktičnim potrebama čovečanstva; za razliku od ovih, svaki novi korak u razvoju same fizike zahtevan je prvenstveno unutrašnjom logikom razvoja nje same.

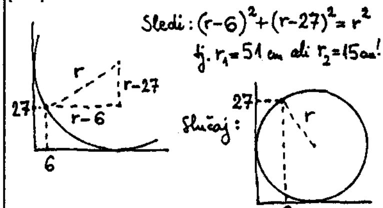
3. MATEMATIKA I FIZIKA

Rezultati merenja ne mogu da se izraze običnim jezikom već se nužno izražavaju brojevima. Otad sledi da se veze među fizičkim veličinama mogu izražavati samo matematikom $\Rightarrow$ Matematika je i jezik i logika fizike (to nije samo skraćeno opisivanje!) Fizički pojmovi i veličine postepeno su evoluirali od intuitivno jasnih ka sve apstraktnijim ali opservable se na kraju uvek svedu na obične realne brojeve. Matematičke teorije čine logički zatvorene sisteme same za sebe, nezavisno od makog iskustva ali izlazi da svaka oblast matematike, pre ili kasnije, opiše neki deo realnosti. Otkud tolika snaga matematike? Naziremo niz razloga:

a) Matematička logika je jednoznačna i objektivna, kao i sama priroda.
b) Matematika daje ekonomiju izraza i lakoću manipulisanja
c) Kada je problem odgovarajuće postavljen i rešen matematika može da dâ nove rezultate i zaključke koji se inače ne bi videli. Primera ima mnoštvo; najfantastičniji je možda matematičko otkriće antimaterije, još jednog celog sveta alternativnog našem! (v. box)
d) Opštost primene: određeni deo matematike prostom reinterpretacijom simbola podjednako dobro opisuje veći broj naizgled potpuno različitih fizičkih sistema - (oscilacije: teg na gumi, klatno, električna kola, itd; talasi u raznim sredinama, polja, itd.).

Evo jednostavnog primera iz Euklidove geometrije (I Euklidova geometrija je fizička teorija; ona opisuje osobine našeg realnog prostora (iako samo približno, ipak toliko dobro da ni merenja najviše tačnosti na Zemlji ne mogu da utvrde odstupanja od nje). Dakle: *Kružni sto naslonjen je u ćošak tako da mu je jedna tačka na obimu normalno udaljena od zida 6 odnosno 27 cm. Koliki je poluprečnik stola?*

Sledi: $(r-6)^2+(r-27)^2=r^2$
tj. $r_1=51$ cm ali $r_2=15$ cm!



inače teško pada na pamet!

Razlika između čiste matematike i verzije koju koriste fizičari leži u shvatanju pojmova: a) beskonačnosti (za fizičara beskonačno je samo vrlo veliko) i b) infinitezimalnosti (za fizičara infinitezimalno je malo u odnosu na neku malu zadatu vrednost, ali ne makoju). Fizičar ne koristi realne brojeve numerički već u racionalnoj aproksimaciji, računajući sa konačnim

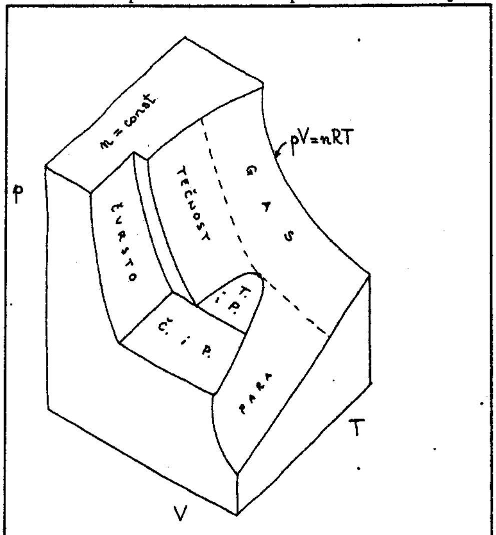
"Na taj način danas sa uverenjem može da se kaže da su kvarkovi i gluoni eksperimentalno opaženi mada ih neposredno nikada nismo videli, a moguće je da ih nikada nećemo ni videti." - A. D. Dolgov, Priroda, 2 (1980) 105 brojem sigurnih cifara (mada su mu realni brojevi bitni za primenu infinitezimalng računa i pojma kontinuuma). Recimo, korišćenje znaka jednakosti uvek implicira sledeće:

2.35 pa bilo koje cifre = 2.35 pa bilo koje druge cifre...!

Kada jednog dana budemo povećali broj sigurnih cifara u ovim rezultatima može se pokazati ili da znak jednakosti još uvek važi ili da više ne važi. Tačnost poznavanja date pojave meri se brojem poznatih cifara u vrednostima fizičkih veličina koje je opisuju.

4. FIZIČKI ZAKON I FIZIČKA TEORIJA

U svojstvu prototipa razmotrimo poznati Bojl - Mariotov zakon. Idealni gas je jednostavan fizički sistem čije je stanje opisano sa samo četiri fizičke veličine: količinom n, zapreminom V, temperaturom T i pritiskom p. Svakom stanju gasa odgovara jedna tačka sa koordinatama (n, V, T, p) u odgovarajućem četvorodimenzionalnom prostoru. Zbog definisanih interakcija između komponenti sistema promena bilo koje veličine uzrokuje zakonomernu promenu ostalih. Tačka stanja gasa pritom opisuje neku jednoznačno određenu hiperpovršinu u ovom 4-dimenzionalnom prostoru. Jednačina te hiperpovršine i predstavlja zakonitost u ponašanju idealnog gasa, odnosno sve veze koje postoje između fizičkih veličina koje opisuju stanje tog fizičkog sistema. Tačka stanja gasa samo može da klizi po toj površini i van nje se ne može naći (kako, međutim, operaciono naterati tu tačku da se stvarno kreće po toj površini sasvim je drugo pitanje - to i jeste je predmet eksperimentalnog umeća). Sve veličine koje opisuju stanje gasa smatramo kontinuirano promenljivim, odnosno smatramo da njihove vrednosti pripadaju skupu realnih brojeva (čak i količina gasa, iako znamo da je ta veličina zbog čestične strukture materije ustvari diskretna, jer je "korak kvantovanja" količine supstance praktično nemerljivo mali, odnosno utiče na cifre rezultata koje sa daleko iza tačnosti merenja ostalih veličina). Operaciono, međutim, ovu površinu nije moguće upoznati odjedanput, već se to može raditi samo u određenim koracima. U svakom od tih koraka sve veličine osim dve moraju se pritom držati konstantnim (koje nazivamo parametrima, P), a od one preostale dve jedna se tada može kontrolisano menjati (koju nazivamo nezavisno promenljivom, X) dok se prati odgovarajuća promena druge (koju nazivamo zavisno promenljivom, Y). Zavisnost Y(X) tada predstavlja presek opšte hiperpovršine sa nekom od ravni koja je paralelna sa X-Y ravni. Bojl - Mariotovim zakonom, naprimer, nazivamo vezu koja postoji između zapremine i pritiska gasa kada su mu količina i temperatura stalne. Operaciono, tu parcijalnu pravilnost u ponašanju gasa upoznajemo kada pratimo promenu pritiska zatvorenog gasa (zavisno promenljiva veličina) u funkciji promene



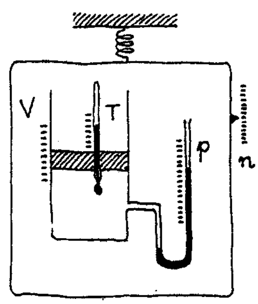
p-V-T dijagram stanja za CO_2

"Nesreća nauke: uništenje divne hipoteze jednom jedinom ružnom činjenicom!" - T. H. Huxley

NB: Fizika radije odgovara na KAKO? nego na ZAŠTO? pitanja

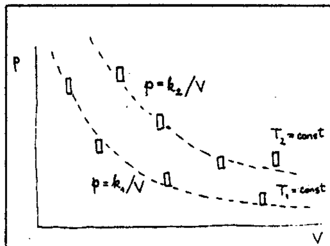
zapremine (nezavisno promenljiva) dok temperaturu i količinu gasa održavamo konstantnom (parametri). Od dve veličine čiju uzajamnu zavisnost ispitujemo za nezavisno promenljivu obično biramo onu veličinu koja se lakše menja i kontroliše. Pošto se četvorodimenzionalni prostor ne može prikazati smatraćemo da je količina gasa stalna pa ćemo ilustracije radi površinu stanja gasa (ovde za CO_2) prikazati u trodimenzionalnom (p, V, T) prostoru. Vidimo da se u nekoj oblasti temperatura gas ponaša po Bojl-Mariotovom zakonu ali u nekoj ne.

Kroz konačan, diskretan skup eksperimentalnih tačaka, dobijenih na poznati način ilustrovan na donjoj slici, provlačimo kontinuiranu funkciju, što izražava našu veru da su p, V i T funkcionalno povezani, tj: da svakoj vrednosti za V odgovara određena vrednost za p, pri datoj vrednosti temperature T (V=nezavisno promenljiva, u operacionom smislu, p = zavisno promenljiva, T = parametar) Analitička funkcija koja najbolje prolazi kroz eksperimentalne tačke je tipa: p = const*T/V koja, posle mnogih provera, postaje fizički zakon, tj. stav koji predstavlja naše poverenje u određenu pravilnost u ponašanju izabranih fizičkih veličina koje opisuju stanje sistema na kvantitativan način. U taj stav uključene su i eksperimentalne operacije pod kojima stav važi (recimo da se promene izvode tako da stvarno bude T=const., da se vrši korekcija na promenu zapremine u manometarskoj cevi, itd). ⟹ **Sada više ne mora da se meri, već se poziva na zakon i ishod se unapred zna!** To je moć egzaktnog predviđanja budućnosti. No, moramo biti svesni ograničenosti važenja svakog fizičkog zakona, tj. opasnosti ekstrapolacija na:



NB: Sve veličine ovde merimo ustvari mereći dužine!

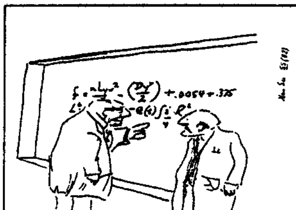
Merenje (kvantifikacija osobina) fizičkih veličina koje karakterišu stanje gasa



Bojl-Mariotov zakon

1) Još uvek nepoznata decimalna mesta (povećanje tačnosti merenja često traži promenu zakonitosti; ovde npr. Van der Waals)
2) Netestirane sisteme (ovde npr. gasovi velikih molekula, "realni" gasovi)
3) Nove oblasti vrednosti promenljivih i parametara, odnosno odlazak u nepoznate oblasti četvorodimenzionalne hiperpovršine (ovde npr. visoki pritisci, niske temperature, fazni prelazi)

(tu mogu da se jave novosti!). Ali zašto dati zakon izgleda tako kako izgleda, jasno, još uvek nemamo pojma. No, svaki fizički zakon je posledica određenih interakcija između komponenti fizičkog sistema ⟹ Ako poznajemo (ili pretpostavimo) osobine komponenti sistema i osobine interakcija tada možemo izgraditi OPŠTU FIZIČKU TEORIJU koja će matematički davati sve zakone za odgovarajuće sisteme (Npr. kinetička teorija gasova uz pretpostavke o osobinama molekula gasa i njihovih interakcija izvodi sve gasne zakone), tj. ispostavlja se da mnogi fizički zakoni nisu nezavisni već da su svi rezultat neke strukturne i principijelne grupe osobina sistema za koje važe, osobina opisanih datom fizičkom teorijom. Sada "razumemo" zakone a nerazumevanje je spušteno na dublji nivo - ne



– DA LI OVO VAŽI UVEK, PONEKAD ILI NIKAD?

razumemo recimo postulate teorije, vrednosti fundamentalnih konstanti, itd. Važenje teorije je ograničeno na iste sisteme i oblasti vrednosti fizičkih veličina kao i zakoni koji iz nje slede i iz kojih je ona nastala. Uspešna teorija po pravilu predviđa niz dotada neopaženih efekata i onoga što bi, da je nema, bilo otkrivano kao novi fizički zakoni. Postoji nekoliko velikih klasa fizičkih sistema sa operaciono definisanim fizičkim veličinama i odgovarajuæim teorijama koje prekrivaju praktično čitav spektar poznatih sistema i pojava. POTPUNO POZNAVANJE PRIRODE MANIFESTUJE SE U TOME DA NA OSNOVU TEORIJA UMEMO DA PREDVIDIMO PONAŠANJE SVAKOG SISTEMA POD DATIM USLOVIMA I DA NA OSNOVU OPERACIONIH ZNANJA TO UMEMO I DA REALIZUJEMO. Pri tome, jasno, težimo da minimiziramo broj teorija, aksioma i postulata.

5. MERENJE - OSNOV FIZIČKOG EKSPERIMENTA

Pridruživanje brojnih vrednosti fizičkim veličinama centralni je deo i zadatak svakog eksperimenta. Da bismo to uradili mora postojati

1. Jedinica mere za svaku fizičku veličinu, i
2. Procedura za upoređenje vrednosti fizičke veličine sa tom jedinicom mere.

Zbog prvog zahteva postoji čitav niz sistema jedinica (SI je danas zvanično usvojen) a zbog drugog veliki broj instrumenata i metoda za merenje svake fizičke veličine, kao i načina za realizaciju samih jedinica mere. Težnja je da se kao predstavnici jedinica mera iznađu fundamentalni sistemi koji tu jedinicu mere reprodukuju uvek na potpuno isti način, tako da svako, uvek i svuda može da je na isti način iskoristi. Kao merni sistem može se koristiti svaki fizički sistem čije je ponašanje dobro poznato - sistem koji se može dovesti u interakciju sa sistemom na kome se merenje vrši i čija će brojna vrednost neke varijable direktno zavisiti od vrednosti varijable koju želimo da merimo u merenom sistemu. Pri tome interakcija merni sistem $\rightarrow$ mereni sistem treba da bude minimalna.

Cela jedna nauka, metrologija, bavi se usavršavanjem merenja. Specijalizovane državne institucije zadužene su da obezbede da se rezultati merenja jedne te iste stvari ne razlikuju međusobno za više od neke unapred zadate vrednosti. Što je ta vrednost manja, merenja su tačnija. Ove institucije povezane su u globalnu mrežu koja obezbeđuje istost rezultata merenja u okvirima date tačnosti, bez obzira gde se i kada na zemnom šaru ta merenja vršila. Fizičar danas sredstva za merenje uglavnom kupuje i pritom plaća tačnost rezultata koja se datim instrumentarijumom može postići. Industrija naučne instrumentacije je vrlo velika i raznovrsna i zapošljava veliki broj fizičara.

Naučnik koji pokušava da izađe na kraj sa problemom literature.

6. METODOLOGIJA ISTRAŽIVANJA I ORGANIZACIJA SAVREMENE FIZIKE

Počev od Manhatan Projekta razvija se "Big Science" u velikim namenskim Institutima. Formiraju se ogromni projekti i timovi od mnogih uskih specijalnosti. Jaka internacionalizacija fizike. Finansiraju se samo dobro teorijski obrazloženi projekti (što smanjuje draž i mogućnost eksperimentalnog iznenađenja!)

NB: Na dati skup ZAŠTO pitanja fizika odgovara užim skupom složenijih ZAŠTO pitanja!

Osnovni kriterijum vrednovanja postaje broj objavljenih radova ("Publish or perish"). Broj publikacija je ogroman (samo ~ 1% ima trajnu vrednost!). Engleski je definitivno zamenio latinski kao jezik nauke.

Istraživanja se vrše na 1) Univerzitetima ("mala") 2) Institutima (velika i skupa) 3) Industriji ("research and development", R&D, ali usput i fundamentalno, npr. Bell. Tel. Lab. imaju 8 Nobelovaca iz fizike!)

7. FIZIČKA LABORATORIJA DANAS

Fizika je organizovana u neka od najskupljih preduzeća u istoriji ljudskog roda pa sve do malih klasičnih laboratorija - Ogroman broj uskih specijalista se udružuju u velike timove: Fizičari raznih profila: - eksperimentalci, teoretičari, "hardware" (instrumentalci) i "software" (kompjuterski), ali i inžinjeri i tehničari svih vrsta. Ogromna industrija koja proizvodi instrumentaciju radi za fiziku. Najvećim delom instrumenti se više ne prave namenski u laboratorijama nego se kupuju gotovi. Najčešće više ne treba umeti napraviti instrument već ga treba umeti iz ogromnog spektra koje tržište nudi optimalno kupiti i optimalno koristiti.

8. TIPOVI EKSPERIMENATA

1. Rutinska merenja (optimizacija metoda i tehnike merenja za često ponavljana, recimo kontrolna merenja)
2. Sistematska merenja (dugotrajna istovrsna merenja na različitim ili istovrsnim sistemima radi detaljne provere neke teorije ili radi empirijskog upoznavanja osobina tih sistema, i slično)
3. Istraživački eksperimenti različitog nivoa preciznosti i tačnosti, u zavisnosti od veličine traženog efekta (od demonstracionih - kvalitativnih, pa do visoke preciznosti), obično se u jednom aranžmanu izvode samo jednom (ali se i tada ista merenja ponavljaju više puta).
4. Negativni eksperimenti (utvrđuju odsustvo date pojave)
5. Krucijalni eksperimenti ("Experimentum crucis") bitni za potvrdu neke teorije ili hipoteze (često su negativni)
6. Gedanken eksperimenti (misaoni) - koji se ne mogu izvesti ali, poštujući sve što znamo, pokušavaju da odgovore na pitanja tipa: "Šta bi bilo kad bi bilo!"
7. Numerički (kompjuterski) eksperimenti (simulacije) u skladu sa svim onim što se teorijski o sistemu već zna, sa ciljem utvrđivanja odstupanja ponašanja od onoga što se zna (a što se danas sve češće zove "standardnim modelom" date pojave) ili prosto, da bi se sistem adekvatno opisao a bez vršenja merenja, ako verujemo standardnom modelu (tada je numerički eksperiment ekvivalentan realnom!).

9. FAZE FIZIČKOG EKSPERIMENTA

1. Ideja (ali, da bi se sijalica upalila potreban je "izvor struje", tj. prethodno znanje!)
2. Istraživanje prošlosti (i eksperimenta i teorije), da se utvrdi ima li smisla i nije li već urađeno.
3. Studija izvodljivosti (cena + vreme vs tačnost); često izlazi da se, iz manje ili više principijelnih razloga ideja ne može realizovati
4. Preliminarni eksperiment
5. Eksperiment
6. Obrada rezultata
7. Interpretacija: smeštanje u postojeću šemu znanja + projekcija u budućnost

"Nekada je i drugorazredni fizičar mogao da učini prvorazredno otkriće. Danas i prvorazredni fizičar teško može da učini drugorazredno otkriće" - P.A.M. Dirac

8. Prezentacija svetskoj komuni fizičara radi verifikacije i ugradnje u postojeći fundus fizike

Tek po dobijanju potvrdnog odgovora na prethodnu stavku vredi preći na sledeću!

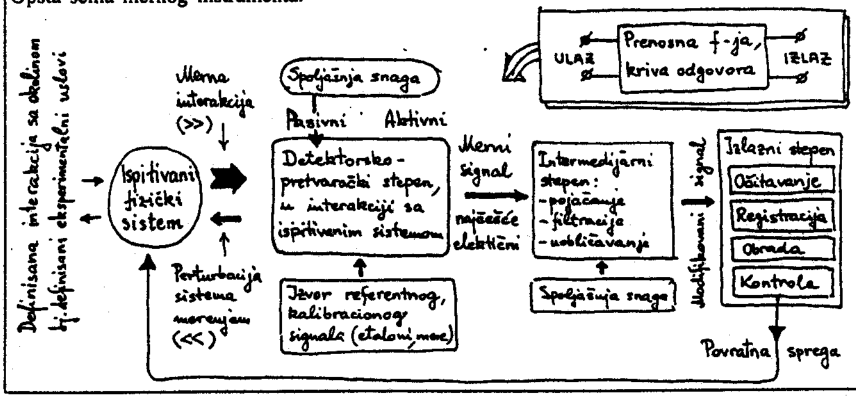
10. MERNA SREDSTVA

Metrološke karakteristike mernog sredstva govore o pogodnosti za merenje date fizičke veličine u datom opsegu vrednosti i sa datom tačnošću.

> Važna preliminarna definicija: Pretpostavljamo da stvarna vrednost date fizičke veličine u sistemu koga merimo, i koju u merenju želimo da odredimo, objektivno postoji pa merena vrednost treba da je što bliže ovoj stvarnoj vrednosti $\Rightarrow$ Merenje je tim TAČNIJE što je razlika između ove dve vrednosti manja (budući da stvarnu vrednost ne znamo - jer da je znamo ne bismo ni merili - utvrditi tačnost datog merenja uopšte nije jednostavno, ali o tome kasnije).

Tačnost zavisi od mnogih faktora (tačnosti reprodukcije jedinice mere, metode merenja, stepena ostvarenja pretpostavljenog stanja sistema, itd, itd.). Tačnost govori da se stvarna vrednost nalazi u datom intervalu, koga zovemo greškom merenja, oko merene vrednosti (veća tačnost, manji interval, tj. manja greška, recimo ±1%, itd). Merna sredstva su dvojaka:
1. Mera, je merno sredstvo koje reprodukuje datu jedinicu fizičke veličine ili neki njen umnožak (tegovi, lenjiri, otpornici, induktivni kalemovi, kondenzatori, normalni elementi, itd....)
2. Merni pretvarač, merni pribor ili prosto instrument je merno sredstvo koje pretvara jednu fizičku veličinu (ulaznu) u drugu (izlaznu) sa ciljem daljeg pretvaranja, čuvanja, obrade ili čitanja rezultata merenja. Električna merenja neelektričnih veličina zasnovana su na pretvaranju fizičkih veličina u električne veličine (napon, struju, otpor) jer se ove lakše čuvaju, transformišu, obrađuju, itd. Danas se trudimo da svi instrumenti budu ovog tipa.

Opšta šema mernog instrumenta:



Dva su osnovna tipa pretvarača (senzora, transdjusera, detektora,...):

"OMNIA IN NUMERO ET MENSURA" - Natpis nad ulazom u Astronomsku opservatoriju u Beogradu

"Kada imamo posla sa priključkom od 220 volti možemo da se igramo sa terminologijom, ali ne i sa priključkom!" - Milorad Mladjenović, "Razvoj fizike I", Beograd 1987

1) Parametarski (ili pasivni) kod kojih je ulazna (promenljiva) veličina neki parametar električnog kola (R, L, M, C) i koji energijom iz sistema, kao kontrolnim signalom, kontroliše prenos energije iz spoljašnjeg izvora snage (napajanja) da bi dao izlazni signal. U principu manje perturbiraju mereni sistem. (Npr.: Otporni termometar je tanka Pt žica sa R=f(T) pa struja kroz nju daje pad napona U=U(T) $\Rightarrow$ Energija izlaznog signala je iz spoljašnjeg izvora napajanja, žica može da bude mala tako da malo remeti sistem.)

2) Generatorski (ili aktivni) koji uzima energiju od merenog sistema i direktno je pretvara u izlazni signal. Ne zahteva dodatni izvor napajanja osim kada efekt treba da se pojača. U principu više perturbira mereni sistem. Ulazna veličina je ili napon (EMS) ili naelektrisanje (struja). (Recimo termo EMS, kao termometar, vs. vidi gore, itd.)

11. KLASIFIKACIJE MERENJA

Moguće su mnogobrojne podele i klasifikacije. Ovo su samo najvažnije:

1) Po obliku funkcionalne zavisnosti između tražene i neposredno merene veličine, i načinu nalaženja brojne vrednosti tražene veličine:

a) direktna, kod kojih se vrednost dobija direktno čitanjem na instrumentu namenjenom merenju baš te veličine (dužina - lenjirom, otpor - ommetrom, snage - vatmetrom, pritiska - manometrom, brzina brzinomerom,...) (instrumenti obično imaju sufiks "metar"),

b) indirektna, kod kojih se tražena vrednost uopšte ne meri, već se nalazi po nekoj definicionoj ili pretpostavljenoj teorijskoj vezi sa direktno merenim veličinama ("sirovim podacima"): Z = F (a,b,c,..), gde su a,b,c,... - direktno merene veličine: (otpor preko struje i napona R = U/I, brzina iz merenog puta i vremena, itd.)

c) parametarska (ili funkcionalna) gde se tražene vrednosti takođe ne mere već se nalaze kao parametri merene funkcionalne zavisnosti, iz broja merenja parova vrednosti nezavisno i zavisno promenljive veličine (x, y) (direktnih ili indirektnih) jednakom bar broju tih nepoznatih parametara: $\Rightarrow$ zahteva bar n merenja parova vrednosti (x,y) odakle se parametri $p_1,\ldots,p_n$ određuju (recimo) metodom najmanjih kvadrata (videti kasnije). (Npr: zavisnost $R(t)=R_o(1+\alpha t+\beta t^2)$ zahteva bar tri merenja parova vrednosti (t,R) da bi se odredile vrednosti tri fizičke veličine - parametara R_o, α, β, od kojih zavisi oblik ove funkcije (NB. Ako je β malo, tačnost merenja treba da bude velika!).

(NB: Za nas je naročito značajno da se vrednosti eksperimentalnih grešaka nalaze različito u gornja tri slučaja! (v. kasnije))

2) Skup fizičkih pojava na kojima se zasniva merenje čini princip merenja a skup načina korišćenja principa i sredstava merenja čini metod merenja. Metodi merenja razlikuju se prvenstveno po organizaciji upoređivanja merene veličine sa jedinicom merenja. Mogućnosti su:

Da li je ovo stvarno brzinomer ili nešto drugo?

a) Metodi neposredne procene (devijacije ili elongacije): Vrednost merene veličine određuje se direktno po stanju uređaja za očitavanje mernog pribora (skale, itd). Tu mera, kao realni predstavnik jedinice merenja, ne učestvuje u merenju; poređenje sa njom je indirektno - preko kalibracije skale. (Tako rade svi ..."metri"). Tačnost je obično mala i određena je ili klasom tačnosti instrumenata (klasa tačnosti = apsolutna greška (koja je ista u celom opsegu!) / opseg merenja (v. kasnije!)). ili polovinom najmanjeg podeoka skale. Ali zato su metodi brzi i omogućuju kontinuirano merenje i praćenje.

b) Metodi upoređenja sa merom: Vrednost merene veličine određuje se iz upoređenja sa merom te iste veličine. Sporiji su ali mogu biti tačniji. Varijante su: Metod suprotstavljanja, gde se direktno upoređuje simultano dejstvo mere i sistema na pribor - potreban je instrument za upoređenje dejstva (masa na terazijama, napon na kompenzatoru sa normalnim izvorom EMS, itd.) Tačnost je reda veličine tačnosti kalibracije mere, u principu visoka - Diferencijalni (opozicioni) metod: Kada na merni pribor deluje razlika merene i poznate veličine (koju predstavlja mera). Moguća je velika tačnost. Nulti metod je varijanta diferencijalnog kada je razlika nula pa mera treba da je promenljiva kontinuirano a pribor treba da bude indikator nule (mostovi, itd) - Metod zamene (supstitucije): Zamena nepoznate veličine merom (kao i ostali, ali ne simultano) (metod zamene na terazijama) - Metod koincidencije (podudaranja): poklapanjem podelaka ili vremenskih signala (lenjiri sa nonijusom, stroboskop, itd).

c) Metodi brojanjem: broj kapljica, obrtaja, perioda, čestica, impulsa, itd...

3) Po referentnom nivou:

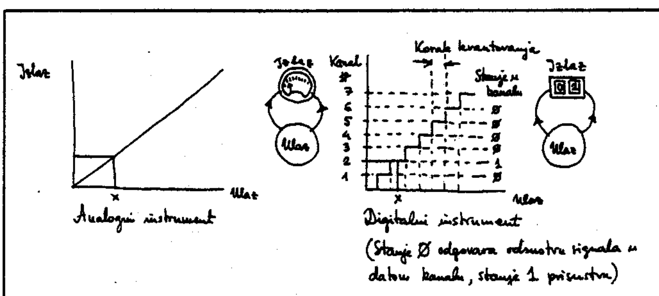
a) Apsolutna: su ona koja se referišu na nulu, koja odgovara odsustvu pojave, npr. pritisak u odnosu na pritisak vakuuma - ili, kada je rezultat dobijen direktnim merenjima osnovnih fizičkih veličina sistema jedinica i fizičkih konstanti, tj. kada je izražen u osnovnim jedinicama za datu veličinu, npr. pritisak u N/m^2.

b) Relativna: su ona koja se referišu na neku proizvoljnu, operaciono pogodnu, jedinicu iste vrste, npr. pritisak u odnosu na atmosferski pritisak (tj. izražen u jedinicama normalnog atmosferskog pritiska) ili gustina u odnosu na gustinu vode, itd. Relativna merenja su metodski jednostavnija i brža.

4) Po načinu predstavljanja rezultata:

a) Analogna: Signal koji nosi informaciju povezan je sa veličinom koju meri kontinuiranim zakonom, kao algebarska funkcija, i samo operacija čitanja pretvara indikaciju (igla na skali, i sl.) u broj sa konačnim brojem značajnih cifara! Analogni signal je u transportu podložan svakojakim izobličenjima.

b) Digitalna: Signal koji nosi informaciju o veličini ima samo diskretan moguć skup vrednosti, unapred diskretizovan datim "korakom kvantovanja", pri čemu se samo konstatuje prisustvo ili odsustvo pojave u intervalu vrednosti koji odgovara datom "kanalu" (stanje Ø odgovara odsustvu signala u datom kanalu, stanje 1 prisustvu) ⟹



Karakteristike analognog i digitalnog instrumenta

Digitalni instrumenti, posle digitalizacije, rade samo sa logičkim signalima (Ø i 1, ili da - ne) te merna informacija, počev od mesta digitalizacije, praktično nije podložna izobličenjima ⟹ Digitalizaciju u mernom lancu treba sprovesti što pre! - Postoje konvertori u oba smera, ADK i DAK. Digitalizovani instrumenti sve više su u upotrebi. - Kod digitalnih instrumenata tačnost je očigledno jednaka polovini poslednje cifre, što je određeno veličinom koraka kvantovanja. Moć razlaganja (v. kasnije) je takođe očigledna i, kao ni tačnost, ne može se nikako povećati

"Ako vi imate jabuku i ja imam jabuku pa ako te jabuke zamenimo tada i ja i vi opet imamo po jednu jabuku. Ali ako vi imate ideju, i ja imam ideju, i ako ih razmenimo, tada i vi i ja imamo po dve ideje!" - Bernard Shaw

ZANZIBAR EFEKT: Prolazeći pored renomirane časovničarske radnje SATOVI ZANZIBAR gradski topdžija je svako jutro po njemu doterivao svoj sat. Kada bi se tačno u podne sa gradske kuće oglasio top časovničar bi po njemu doterao svoje satove!

preko one zadate konstrukcijom i kalibracijom. Ovo je glavni argument protiv čitanja delova najmanjeg podeoka na analognom instrumentu!

12. KALIBRACIJA (BAŽDARENJE) MERA, INSTRUMENATA I METODA

Budući da merenje predstavlja upoređenje date veličine sa izabranom jedinicom očigledno je da je suštinski bitno da svi koriste iste jedinice. Pitanje je, jasno koliko je to isto - isto! Taj stepen "istosti" definiše se tačnošću kalibracije. Takođe je potrebno da i svi metodi za upoređivanje (tj. metodi merenja) "isto rade". Sa ovim je povezana kalibracija metoda. Velike državne i internacionalne službe i mreže brinu se za standardizaciju i kalibraciju i distribuciju primarnih i sekundarnih etalona, radnih mera, instrumenata, pa i mernih metoda. Pritom je, jasno, ključno pitanje stalnosti i reproducibilnosti etalona i savremena metrologija teži definisanju etalona preko univerzalnih fizičkih konstanti. Ove metrološke službe eksperimentalnog fizičara, međutim, obično zanimaju samo utoliko što se od njih mogu kupiti merna sredstva sertifikovane tačnosti kalibracije.

a) Kalibracija mera: Kupljene mere date tačnosti kalibracije (koja je uvek proporcionalna ceni!) treba umeti čuvati i koristiti tako da im se tačnost kalibracije ne kvari. Strogost u ovome je od najvećeg značaja [!] jer, recimo provera kalibracije instrumenata pa i metoda zahteva korišćenje mera čija je tačnost kalibracije za red veličine veća od tačnosti koju proverava! Takođe, problemi oko očuvanja tačnosti kalibracije direktno su proporcionalni toj tačnosti!

b) Kalibracija instrumenata: Danas se instrumenti najčešće kupuju sa datom tačnošću kalibracije koja, iako je odgovarajuće plaćena, treba bar jednom da se proveri na meri, ili sistemu, jedne više klase tačnosti. Kako se kalibracija instrumenata vremenom i korišćenjem kvari povremene provere i rekalibracije su obavezne. Nekritično korišćenje instrumenata sa slepim poverenjem u pročitani rezultat je nedozvoljeno!

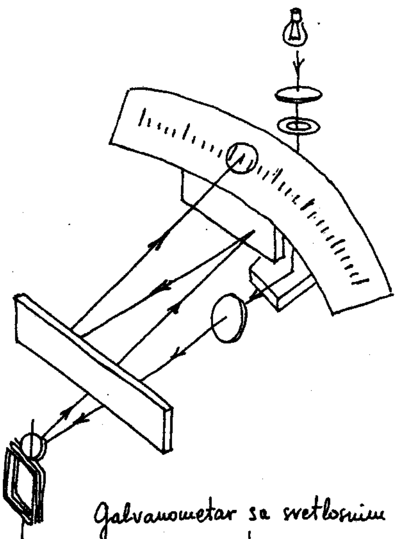
c) Kalibracija metoda: Za svaki metod merenja treba imati kalibracionu proceduru i kalibracioni sistem koji će služiti 1) za kontrolu ispravnosti rada celog eksperimenta i 2) za eventualno uvođenje i određivanje potrebnih korekcija svojstvenih datom metodu merenja.

МИКИ МАУС

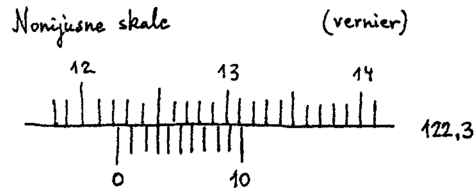
13. STATIČKE OSOBINE MERNIH INSTRUMENATA

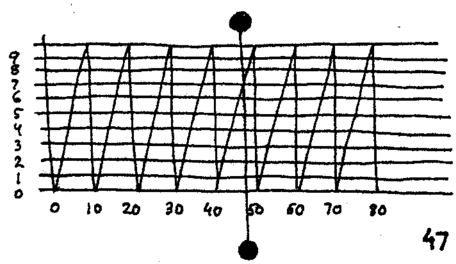
Merni instrumenti rade u dva osnovna režima: statičkom i dinamičkom. Statički režim je onaj u kome se instrument i merni sistem nalaze u ravnoteži (prelazni režim uključenja instrumenta u sistem je prošao) a varijabla sistema koju merimo ne zavisi od vremena. Tada ni izlazna varijabla instrumenta ne zavisi od vremena, a njena vrednost u odnosu na vrednost ulazne varijable zavisi od onoga što zovemo statičkim osobinama instrumenta. One su:

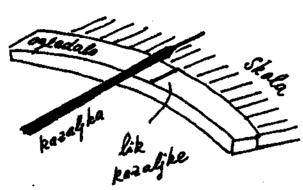
1) ČITLJIVOST: je mogućnost tačnosti očitavanja rezultata. Zavisi od veličine skale, veličine podelaka, paralakse, principa očitavanja. Neki sistemi očitavanja su:



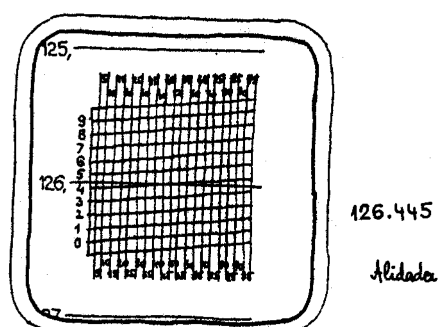
Galvanometar sa svetlosnim spotom





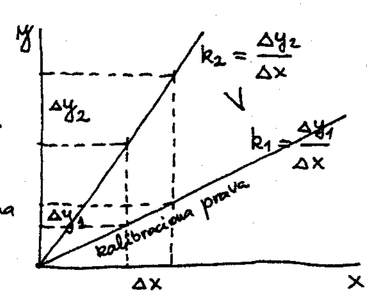


Totalna korekcija paralakse



Alidada

2) OSETLJIVOST: je odnos promene pokazivanja instrumenta prema promeni merene veličine koja je to pokazivanje prouzrokovala. Ako je pokazivanje instr. (izlaz) y a merena veličina (ulaz) x, i ako je rad instrumenta zasnovan na zavisnosti (prenosna funkcija, kalibraciona linija ili funkcija odziva) $y = f(x)$, onda je osetljivost jednaka:



$$\boxed{\text{Osetljivost} \equiv S = \frac{\partial y}{\partial x}}$$

ili, za slučaj linearnog instrumenta, kome se uvek teži: $y = k \cdot x$ i $S = k$ = kalibracioni faktor.

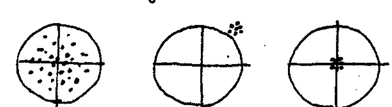
NB: Eksperimentalna vežbanja iz fizike nisu eksperimentalna fizika, ali jesu osnove zanata!

⇒ Osetljivost je tim veća što je veća promena izlaza za istu promenu ulaza. Linearan instrument u celom opsegu ima istu osetljivost i ima i linearnu skalu. Ponekad se uvodi i tzv. konstanta instrumenta $= 1/S = 1/k$.

3) MOĆ RAZLAGANJA: je najmanja promena ulazne veličine na koju će instr. primetno da reaguje (zove se i rezolucija). Kod digitalnih instrumenata očigledno je jednaka koraku kvantovanja, tj. vrednosti poslednje cifre ("least count").

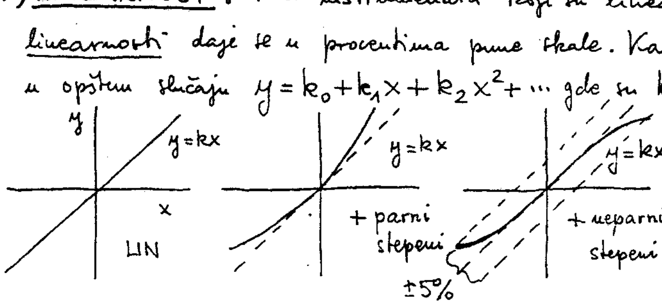
4) TAČNOST: je mera razlike između čitanja datog instrumenta i "prave" vrednosti definisane najboljim mogućim i mnogobrojnim merenjima te veličine, ili njenom definicionom vrednošću. Tačnost se može popravljati kalibracijom ali samo do granice svojstvene datom instrumentu. Zadaje se ili klasom tačnosti instrumenta, K = tačnost pokazivanja pri punom otklonu skale, data u % punog otklona, i ista je u celom opsegu.
ili je jednaka polovini najmanjeg podeoka na skali. Konačna tačnost instrumenata jedan je od osnovnih razloga postojanja sistematske eksperimentalne greške (cf. kasnije).

5) PRECIZNOST: je mera stepena rasturanja ponovljenih merenja jedne te iste vrednosti (reproducibilnost). Zavisi od konstrukcionih osobina instrumenta (preciznost obrade mehaničkih delova, trenja, histerezis, itd). Predstavlja jednu od komponenti statističke (slučajne) eksperimentalne greške (cf. kasnije). Daje se u %.
– Slikovita predstava gađanja u metu:



6) OPSEG: je opseg vrednosti ulazne veličine u kome instrument radi. Veliki opseg teško se postiže. Problemi naročito na ekstremima opsega ⇒ Treba menjati instrument!

7) LINEARNOST: Kod instrumenata koji su linearni odstupanje od linearnosti daje se u procentima pune skale. Kalibraciona jednačina je u opštem slučaju $y = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots$ gde su k_i - kalibracioni faktori

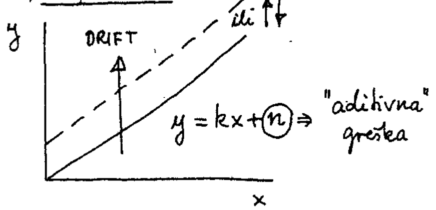


⇒ Kaže se: "linearan sa ±5%" a misli se da unutar toga nije!
⇒ Greška usled nelinearnosti dodaje se na grešku usled ograničene tačnosti.

"Jako to može izgledati paradoksalno, svim egzaktnim naukama dominira ideja aproksimacije"
Bertrand Russel

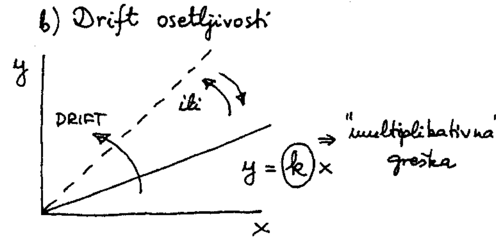
8) DRIFT (Drajf ili stabilnost): je varijacija na izlazu instrumenta koja nije uzrokovana nikakvom promenom na ulazu. Može biti periodičan ili istosmeran u vremenu. Potiče od nestabilnosti komponenti, uslova, postepenog starenja, itd. Ima ga dve vrste:

a) Drift nule



$y = kx + n \Rightarrow$ "aditivna" greška

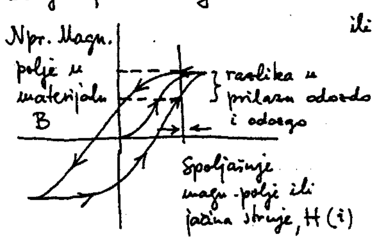
b) Drift osetljivosti



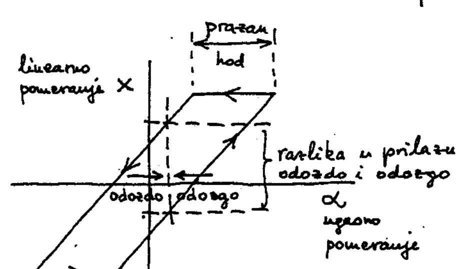
$y = k x \Rightarrow$ "multiplikativna" greška

Oba mogu biti sistematska ili slučajna (sistematski se koriguje a slučajni ne).

9) HISTEREZIS (Kašnjenje): Instrument ga poseduje kada postoji razlika u merenoj vrednosti ako joj se prilazi "odozdo" ili "odozgo". Posledica je magnetnih efekata (zaostala magnetizacija), elastične deformacije (zaostala deformacija), dielektričnih efekata (zaostala polarizacija), "praznog (mrtvog) hoda" (maksimalnog rastojanja ili ugla za koji se može pomeriti jedna komponenta mehaničkog sistema a da se ništa drugo ne pomeri), itd. tj. javlja se uvek kada sistem bar delimično pamti svoju predistoriju:



ili



⇒ Izbegava se tako što se merenoj vrednosti uvek "prilazi sa iste strane".

10) PRAG INSTRUMENTA: Apsolutna vrednost veličine ispod koje instr. na nju ne reaguje.

11) EFIKASNOST: Ako instrument meri veličinu q ⇒ $\boxed{\text{Efikasnost} = \text{jedinica za } q/W}$ a govori o tome koliku snagu [u W] instrument troši iz merenog sistema za merenje jedinične vrednosti. ⇒ Velika efikasnost je poželjna jer tada instrument manje perturbira sistem. (Npr. voltmetar ima ulaznu impedansu (cf. kaniје) $20000\frac{\Omega}{V}\Big|\cdot\frac{A}{A} = 20000\frac{V}{W}$ tj. za pokazivanje od 20 000 V troši 1W snage iz merenog sistema ⇒ $10^6\,\Omega/V$ 50 puta manje perturbira sistem! Ili: Merenje R ommetrom: Efikasnost mu je data u $\Omega/W \equiv 1/i^2$ gde je i struja koju instrument šalje kroz R ⇒ ta energija ide kroz R, greje ga i menja, i to tim više što je efikasnost manja, tj. potrebna struja veća!).

"Pod vedrim nebom, koje nam otvara vidik u dubine prostora, dobivaju pitanja o sudbini sveta tek svoje pravo značenje; na hartiji nam ona izgledaju skoro beznačajna."
M. Milanković: "Kroz vasionu i vekove"

- OPŠTE PRIMEDBE: Kod dobrog instrumenta sve su osobine usklađene: čitljivost sa moći razlaganja, tačnošću i preciznošću, linearnošću, i svim ostalim. Kod takvog instrumenta nema smisla čitati delove podeoka u apsolutnim merenjima – to je kod digitalnog instrumenta najočiglednije, a ako se želi veća tačnost ili se pređe na drugi opseg ili se promeni instrument (kod relativnih merenja ovo još može da ima smisla, mada je i tu problematično ako su tačnost (kalibracija) i preciznost ("finoća") zaista usklađeni).

- Što su sve karakteristike bolje to je instrument skuplji a merenja sa njim i održavanje složenije
- Od svih osobina ona koja je najlošija definiše grešku merenja (sistematsku – prvenstveno tačnost, slučajnu – prvenstveno preciznost)
- Kalibracija se svakom instrumentu ponovo kontroliše u određenim intervalima, mečim što je kar za red veličine tačnije.

(14) DINAMIČKE OSOBINE MERNIH INSTRUMENATA

Instrument se nalazi u dinamičkom režimu kada ulazna veličina zavisi od vremena. Ako je u statičkom režimu ulazna veličina U_0 a izlazna J_0 (i neka je instrument linearan) osetljivost je J_0/U_0 u dinamičkom režimu gde je $U=U(t)$ i $J=J(t)$ dinamička osetljivost neće biti jednaka statičkoj, tj. $\frac{J(t)}{U(t)} \neq \frac{J_0}{U_0}$.

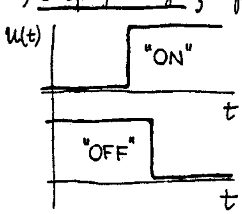
Postoje dva razloga zašto izlaz ne može da prati ulaz. To su:

a) Inercija, tj. za promenu stanja instrument zahteva energiju a za transfer energije treba vreme. Mogu biti:
- Mehanička inercija, Električna inercija, Toplotna inercija, Pneumatička, itd...

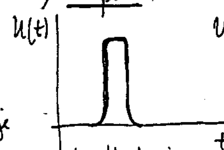
b) Otpor, ("trenje") koji uvek disipira energiju, tj. usporava željeni prenos energije i uvek degradira energiju u toplotu:
- Suvo trenje, viskozno trenje, Unutrašnje trenje u čvrstim telima, Električni otpor, zračenja, itd ..

Tri tipa ulaza $U(t)$ su karakteristična i naročito važna:

1) Step funkcija, koja opisuje prelazne režime, ili uključivanje i isključivanje instr. u sistemu

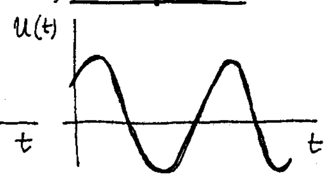


2) Impuls



(kratkotrajna pojava)

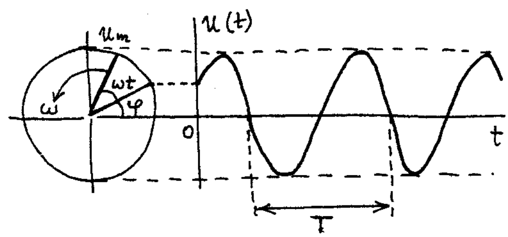
3) Harmonijski ulaz



(periodična pojava)

"Expert is a man who, by his own painful experience, has learnt a tiny little bit about some of the worst mistakes one can make within a most restricted field" Niels Bohr

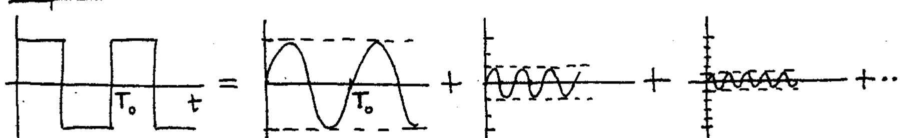
Zbog postojanja <u>harmonijske analize</u> (Furijeove) harmonijski ulaz je najvažniji.



$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$
$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$
φ = početna faza
U_m = amplituda

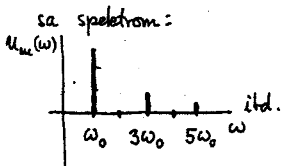
harmonijska funkcija

Harmonijska analiza dozvoljava <u>razvoj</u> svake <u>periodične funkcije</u> u beskonačan zbir (red) harmonijskih funkcija određenih amplituda, čije učestanosti čine beskonačan niz <u>diskretnih vrednosti</u>, koji se zove <u>spektrom</u> date funkcije, a svaki takav harmonijski sabirak je njena <u>harmonijska komponenta</u>. [Primer:



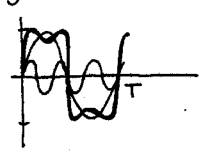
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}, \qquad = \sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \cdots$$

sa spektrom:



Prve dve komponente ("harmonika") daju

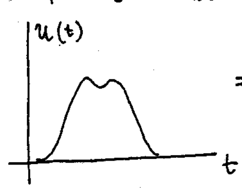
+ FAZE!



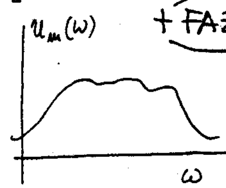
što već počinje da liči na datu funkciju!]

Svaka <u>aperiodična funkcija</u> može se na sličan način predstaviti u obliku <u>Furijeovog integrala</u>, odnosno beskonačnog zbira harmonijskih funkcija čije i amplitude i učestanosti čine kontinuum, odnosno čiji je <u>spektar</u> sada <u>kontinuirana funkcija</u> $U_m(\omega)$ (Furijeov transform) [Primer:

Funkcija



= Integral, tj. Zbir beskonačno mnogo harmonijskih funkcija čije su amplitude u funkciji njihove učestanosti, $U_m(\omega)$, jednake:

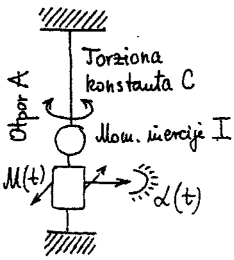


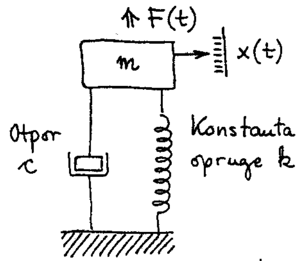
+ FAZE!

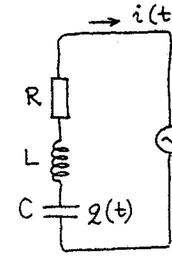
Ovo nam omogućava da znajući odgovor instrumenta za harmonijski ulaz u funkciji učestanosti (promene amplitude i faze izlaza u odnosu na ulaz) znamo i odgovor instrumenta za <u>proizvoljnu funkciju</u>. Procedura je otprilike sledeća: Datu ulaznu funkciju razložimo u njen harmonijski spektar pa pogledamo kako se koja komponenta prenosi kroz instrument. Zatim od tako promenjenih komponenti na izlazu iz instrumenta sintetišemo izlaznu funkciju.

"... Maybe you didn't make an error, but a discovery...", R. McCormmach: "Night Thoughts of a Classical Physicist"

Mi ćemo malo detaljnije posmatrati samo jednu klasu instrumenata, <u>Linearne sisteme drugog reda</u>, čiji je tipični predstavnik <u>galvanometar</u> (tj. instrument sa kretnim kalemom)







$$V(t) = \sum V_i = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

Torziono klatno (Galvanometar)	Teg na opruzi	RLC kolo	Analogni sistemi
Moment sprega sila $M(t)$	Sila $F(t)$	Napon $V(t)$	Ulaz (prinuda) $U(t)$
Ugao $\alpha(t)$	Pomeranje $x(t)$	Naelektrisanje na C: $q(t)$	Izlaz $J(t)$
Moment inercije I	Masa m	Induktivitet L	I = inercija
(EM+vazd+trenje) A	Trenje c	Otpornost R	R = otpor
Torziona konst C	Konst. opruge k	Kapacitet $1/C$	K = čvrstina

Opisani su opštom <u>linearnom diferencijalnom jednačinom</u> sa konstantnim koeficijentima:

$$\boxed{U(t) = I\frac{d^2J(t)}{dt^2} + R\frac{dJ(t)}{dt} + KJ(t)} \;\otimes \quad /:I \Rightarrow$$

(sistem je <u>nelinearan</u> ako koeficijenti I, R, K zavise od amplitude varijable a <u>parametarski</u> ako zavise samo od vremena).

$$\frac{1}{I}U(t) = \frac{d^2J}{dt^2} + \left(\frac{R}{I}\right)\frac{dJ}{dt} + \left(\frac{K}{I}\right)J$$

statičke osobine I, R, K određuju dinamičke $\mathcal{R}$; ω_0!

$\mathcal{R}$ = koeficijent amortizacije $\quad \omega_0^2$ = sopstvena učestanost

$\Rightarrow$ Dif. j-na je: $\boxed{\frac{1}{I}U = \frac{d^2J}{dt^2} + \mathcal{R}\frac{dJ}{dt} + \omega_0^2 J}$ čije je <u>rešenje</u>, za datu zavisnost ulaza od vremena $U(t)$, <u>definisana zavisnost izlaza od vremena</u>: $J(t)$.

Poreklo nastanka j-ne $\otimes$ za slučaj tega na opruzi: II Njutnov zakon $F = ma$ ovde glasi:

$$\underbrace{\underbrace{F(t)}_{\text{Spoljašnja sila}} - \underbrace{kx}_{\text{Restituciona sila opruge}} - \underbrace{cv}_{\text{Sila trenja koje zavisi od brzine}}}_{\text{Rezultanta svih sila}} = ma, \quad \text{uz } v = \frac{dx}{dt} \text{ i } a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Rightarrow F(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx \qquad \text{Q.E.I}$$

Posmatraju se <u>tri zanimljiva slučaja</u>:

① <u>Slobodni neamortizovani linearni harmonijski oscilator</u> (LHO) koji se dobija kada je $\mathcal{R} = 0$ a $U(t)$ = Impuls ili Step

$\Rightarrow$ Dif. j-na je: $\frac{d^2J}{dt^2} + \omega_0^2 J = 0$

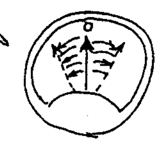
čije je rešenje (proverite!) harmonijska (oscilatorna) f-ja:

NB: TEORIJA JE OPISIVANJE EKSPERIMENATA!

"Mapa nam se čini stvarnijom od zemljišta koje treba da predstavlja" D. H. Lawrence

$\boxed{\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}_m \sin(\omega_0 t + \varphi)}$ i $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{I}}$ a vrednost početne faze φ određena je početnim uslovom $\mathcal{J}(t=0)$

⇒ Svaki(će) instrument čiji je rad zasnovan na transformaciji merene veličine $\mathcal{U}(t)$ u veličinu $\mathcal{J}(t)$ pomoću linearnog sistema drugog reda (i kod koga je, shodno tome, ta izlazna veličina dovedena na skalu instrumenta) izveden iz "ravnotežnog položaja" pa prepušten sam sebi oscilovati svojom sopstvenom učestanošću ω_0



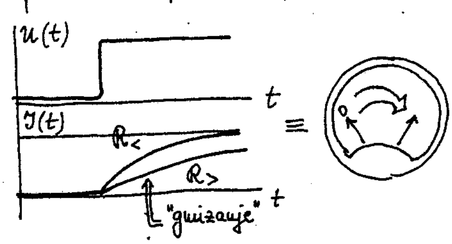
učestanost osc. može biti jednaka samo ω_0!

② Realni slučaj slobodnog amortizovanog LHO : $R \neq 0$

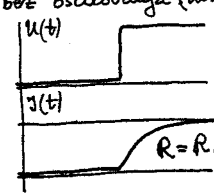
a $\mathcal{U}(t)$ = Impuls ili Step (⎍ ili ⎍)

Razlikuju se tri slučaja:

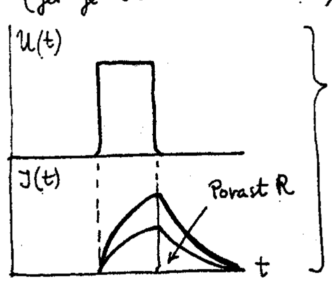
a) Jaka amortizacija, kada je $R^2/4 > \omega_0^2$, kretanje je aperiodično, instrument dostiže pun otklon sporo, bez "prebačaja", npr.



b) Kritična amortizacija, $R^2/4 = \omega_0^2$ tj. $R_{krit} = 2\sqrt{KI}$, dobija se granično aperiodično kretanje, najbrže kretanje bez oscilovanja (dostizanje punog otklona ili vraćanje u nulu) (balistički galvanometar)



⇒ Ni u jednom ni u drugom slučaju, prepušten sam sebi, sistem ne može da osciluje (jer je suviše amortizovan, tj. otpor mu je preveliki). Odgovor na impuls je:

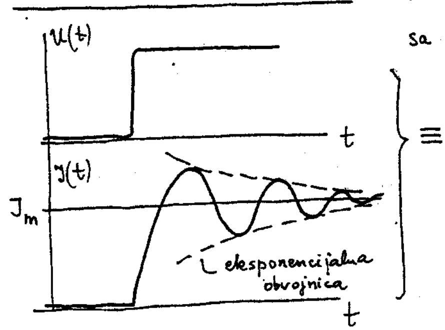


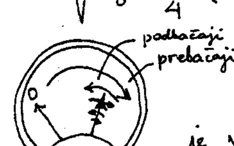
⇒ Tu već vidimo šta je $\boxed{\text{IZOBLIČENJE}}$ u dinamičkom režimu. Uporedite ovda $\mathcal{U}(t)$ vs $\mathcal{J}(t)$!

c) Slaba amortizacija, $R^2/4 < \omega_0^2$, prepušten sam sebi instr. može da osciluje (amortizovane harm. osc.)

Rešenje dif. j-ne je: $\mathcal{J}(t) = \mathcal{J}_m e^{-\frac{R}{2}t} \sin(\omega' t + \varphi)$

sa $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4}}$ $(< \omega_0)$ koje izgleda ovako:





Dinamika odgovora instrumenta karakterisana je veličinom vremenske konstante sistema $\tau = 2/R$.

③ Realni slučaj prinudnih oscilacija, kada je $R \neq 0$ a ulaz (prinuda) je harmonijska $U(t) = U_m \sin \omega t$, koji je zanimljiv jer smo znajući kako instrument prenosi harmonijske funkcije, zahvaljujući harmonijskoj analizi, u stanju da vidimo kako prenosi i svaku proizvoljnu funkciju (gde pod "kako" podrazumevamo koliko verno, tj. sa kakvim izobličenjima, odnosno greškama). Definišemo impedansu oscilatora ⇒ koja je jednaka prinudi potrebnoj da izazove jediničnu promenu brzine izlazne veličine.

$$|Z| = \sqrt{\underbrace{R^2}_{\text{aktivni}} + \underbrace{\left(\omega I - \frac{K}{\omega}\right)^2}_{=X=\text{reaktivni}}} = \boxed{f(\omega)\,!}$$

otpor

↳ Impedansa je funkcija učestanosti prinude ω.

⇒ Izlaz je opet harmonijska funkcija: $\mathcal{J}(t) = \boxed{\dfrac{U_m}{\omega|Z(\omega)|}} \sin(\omega t - \varphi(\omega))$

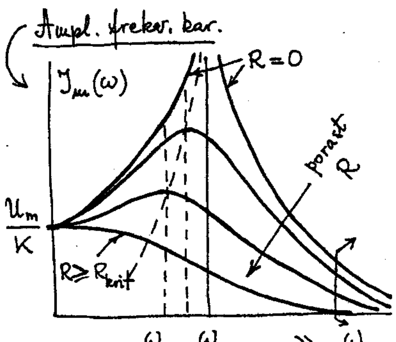
kojoj i $\boxed{\text{amplituda i faza zavise od učestanosti prinude}}$ $\mathcal{J}_m(\omega)$ i $\varphi(\omega)$

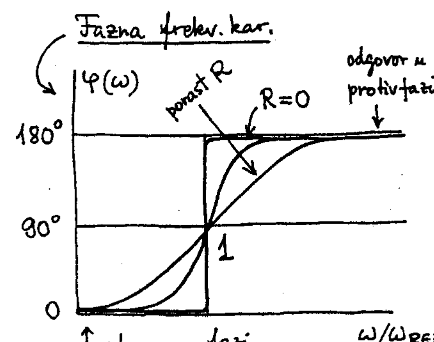
$\mathcal{J}_m(\omega)$; $\operatorname{tg}\varphi(\omega) = \dfrac{X}{R}$

⇒ Izlaz je ⓐ fazno pomeren u odnosu na ulaz (i to u zavisnosti od učestanosti) i ⓑ amplituda mu zavisi od učestanosti, a učest. izlaza = učest. ulaza

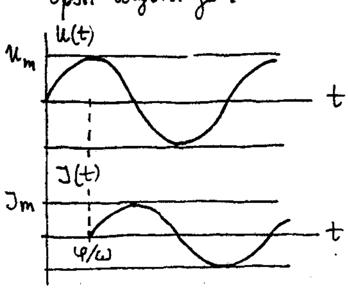
⇒ Zavisnost amplitude i faze odgovora od učestanosti prinude zovu se amplitudska i fazna frekventna karakteristika. Za čisti lin. sist. II reda one su:

Ampl. freker. kar. i Fazna freker. kar.





→ Opšti odgovor je:



⇒ Kada je učest. prinude jednaka ω_{REZ} $\left(\omega_{REZ}^2 = \omega_0^2 - \dfrac{R^2}{2I^2}\right)$ tada je amplituda odgovora vrlo velika, odnosno velika je predaja energije instrumentu, i tada kažemo da je sistem u rezonanciji. [Rezonancija, tj. porast amplitude odgovora za neki interval učest. prinude, moguća je samo za slabo amort. sisteme, kada je $R \leq R_{krit}$]. Instrument, dakle, najbolje "propušta" učestanosti bliske rezonantnoj. Širina

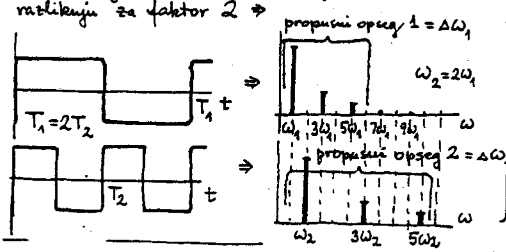
"Oduvek je bila moja aksioma da su male stvari daleko najvažnije" Sherlock Holmes

amplitudske frekventne karakteristike ("rezonantne krive") definiše propusni opseg instrumenta. Sve učestanosti znatno veće od rezonantne instrument slabo propušta. Ovakvi sistemi su, dakle, selektivni i to tim više što im je propusni opseg uži, odnosno amortizacija slabija. Oni svaki ulazni signal koji ima harmonijske komponente van propusnog opsega izobličavaju jer mu menjaju spektar ne propuštajući više i niže komponente.
Na jako brze promene ulazne veličine, tj. na jako brze ulazne signale (brže od rezonantnih) oni praktično ne reaguju. Tu osobinu zovemo vibroizolacijom (recimo masivan sto na gumi ne reaguje na mehaničke osc. zvučnih učestanosti i dobra je podloga za finu optiku gde amplitude reda dela talasne dužine ništavaju interferencione slike).

- Elektronski sklopovi imaju amplitudske i fazne frekventne karakteristike koje se mogu oblikovati praktično po želji, u zavisnosti od namene, i to je još jedan od razloga što se uvek trudimo da sve veličine transformišemo u električne, za potrebe merenja. ⇒

Propusni opseg	Izobličenja	Prenos oscilacija, tj. snage
– Selektivnost (uzan opseg) – Vibroizolacija (malo ω_{REZ}) – Spektralna analiza (promenljiv) · Veran prenos (vrlo široke)	– Favorizovanje i otsecanje nekih komp. – Filtriranje	– Traži usaglašene (prilagođene) impedanse, isti propusni opseg, itd..

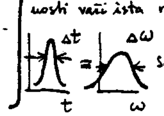
IZOBLIČENJE ≡ Pojavu, na osnovu izlaza iz instrumenta, vidimo na jedan način – a veličina o kojoj sudimo, na ulazu u instrument, može da izgleda sasvim drugačije. Ako izobličenje ne eliminišemo (korišćenjem instrumenta sa dovoljno širokom prenosnom funkcijom koja obezbeđuje veran prenos svih glavnih harmonika ulazne promene) ili ako na njega ne izvršimo korekciju (nalaženjem ulaza za poznati izlaz pomoću poznate prenosne funkcije, tj. amplitudske i fazne frekventne karakteristike, i harmonijske analize) ostaćemo sa nečim što čini ozbiljnu sistematsku grešku merenja u dinamičkom režimu. ⇒ Vernost prenosa, tj. rada u dinamičkom režimu, zahteva ravnu amplitudsku i faznu frekventnu karakteristiku u opsegu učestanosti koje čine "signal". Pri tome, što je pojava brža (tj. ili impulsni ulaz kraći, Δt manje, ili periodična funkcija kraćeg perioda) to je za veran prenos potrebna šira prenosna funkcija, tj. veran prenos u širem opsegu učestanosti, $\Delta\omega$ veće. Dakle $\boxed{\Delta\omega \cdot \Delta t \simeq \text{const}}$. Ovo možemo razumeti analizom prenosa periodičnog četvrtastog signala, čiji harmonijski spektar znamo (str. 15): Ako imamo dve takve funkcije čije se periode razlikuju za faktor 2 ⇒



Dakle, za prenos istog broja harmonijskih komponenti (ista tačnost) u slučaju duplo brže promene potreban je duplo širi propusni opseg, tj.

$\Delta\omega \sim \frac{1}{T}$ QED !

U slučaju aperiodične f-je, impulsa, gde je harmonijski spektar (Furijeov transform) kontinuirana funkcija učestanosti važi ista relacija:

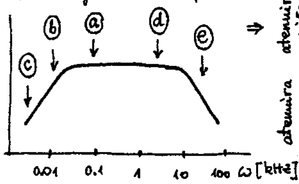


sa $\boxed{\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t}}$

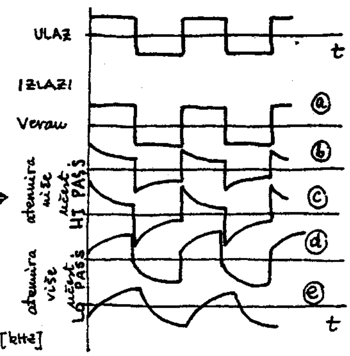
Nemojte ni da počinjete eksperiment ako ne znate šta treba da dobijete (parafraza na J. A. Wheelera)

Ako znate šta treba da dobijete nemojte ni da počinjete eksperiment ("tournure de phrase" na parafrazu J. A. Wheeler-a)

Instrumenti namenjeni merenju vrlo brzih pojava moraju imati ravne prenosne funkcije u vrlo širokom opsegu učestanosti. Tipičan takav instr. je OSCILOSKOP čiji pojačavači moraju biti širokopojasni da bi mogli bez izobličenja da mere brze signale (DC pojačavači). (Zbog velikih faktora pojačanja oni imaju i vrlo velike ulazne otpornosti, tj. veliku osetljivost i efikasnost, pa su krajnje neperturbativni). Ako je ulazni napon periodična četvrtasta funkcija tada izlazni napon koga vidimo, u zavisnosti od učestanosti osnovnog harmonika, izgleda kao na sledećim slikama, ako je realna amplitudska frekventna karakteristika kao ova ovde:



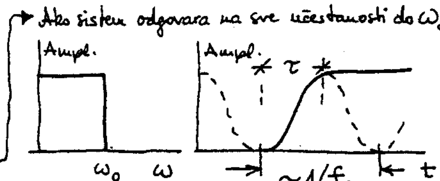
⇒



Slično, može se posmatrati vreme potrebno za dostizanje stacionarnog odgovora instrumenta ili vreme potrebno za uspostavljanje oscilacija u slučaju harmonijskog ulaza. To tzv. vreme porasta ("rise time") takođe je obrnuto proporcionalno propusnom opsegu, npr.

$$\Rightarrow \boxed{\tau \simeq 1/\Delta\omega}$$

Ako sistem odgovara na sve učestanosti do ω_0:

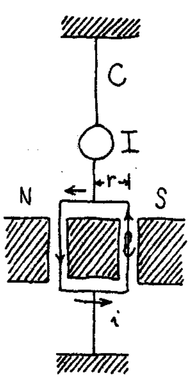


onda je vreme porasta približno ½ perioda sinusnog talasa te učestanosti, tj.

$$\tau \simeq 1/2f_0 = \pi/\omega_0 .$$

Instrument koji je tipični linearni sistem II reda, u širokoj upotrebi, je:

(15) GALVANOMETAR (AMPERMETAR) SA KRETNIM KALEMOM (D'Arsonval)



efekt krajeva "rasejava" magnetno polje na velikim otklonima α

S = površina kalema = $l \cdot 2r$

n = broj navoja

B = magn. indukcija radijalnog polja

r = radijus kalema

l = dužina kalema

i = jačina struje kroz kalem

⇒ Sila na 1 navoj je: $F = Bil$

Moment EM sprega:

$$M = F \cdot r = ilB \cdot 2r = iBS$$

Moment celog kalema (elektromagnetni):

$$\mathcal{M} = iBSn$$

a povratni-torzioni moment:

$$\mathcal{M}_p = C \cdot \alpha$$

⇒ U ravnoteži $\mathcal{M} = \mathcal{M}_p$ ⇒

⇒ $iBSn = C \cdot \alpha_{ravn}$ ⇒

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{ravn} = \underbrace{\left(\frac{BSn}{C}\right)}_{\text{konstrukciona const.}} i = k \cdot i} \Rightarrow \underline{\text{Osetljivost}} = \boxed{\frac{\mathcal{I}}{\mathcal{U}} = \frac{\alpha}{i} = k = \frac{BSn}{C}}$$

⇓

B treba da je u celom opsegu ⇒ α isto, i što jače.

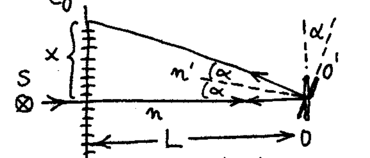
⇒ Ulaz = i, Izlaz = α_{ravn} ⇒ Instrument za merenje jačine struje po uglu skretanja je linearan

Skretanje se meri: a) Kazaljkom i skalom (ampermetar)
b) Svetlosnim spotom i ogledalom (galvanometar)

Period slobodnih oscilacija (zaklati se pa se meri!)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C}{I}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \frac{4\pi^2 I}{T^2} \quad (I = \text{moment inercije sistema})$$

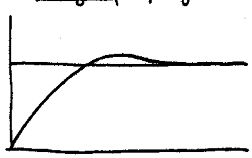


L = optički krak (=1÷3 m)

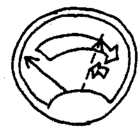
$x = L\,\mathrm{tg}\,2\alpha \simeq 2L\alpha$

$\Rightarrow$ Osetljivost galv. preko perioda slob. osc. $\Big\} \equiv k = \boxed{\dfrac{BSn}{4\pi^2 I}T^2}$ $\Rightarrow$ Složena zavisnost, ali tim je veća što je veći period slob. osc. tj. manje ω_0.

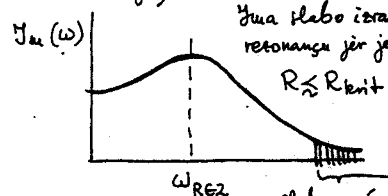
$\Rightarrow$ Kompromis: brzina očitavanja vs reakcija na promenu $\Rightarrow$ najbolje blago potprigušen (malo slabije od kritične amortizacije) $\Rightarrow$



$\equiv$



i



Ima slabo izraženu rezonancu jer je $R \lesssim R_{krit}$

slabo oseća niže učest. (vibroizolacija) (+ne naizm. str.)

kod galv. velike osetljivosti period slob. osc. $\underline{T \gtrsim 1\,s}$ i $\omega_0 \simeq 1\,s^{-1}$

Tipične karakteristike nekih galv. su:

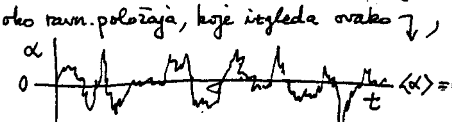
Optički krak	Osetljivost/mm skale	Period slob. osc. [s]	Otpor kalema r [Ω]
1 m	10 pA	40	800
Unutr. opt. sist.	500 pA	3	550
Sa iglom i skalom	30 nA	5	1900

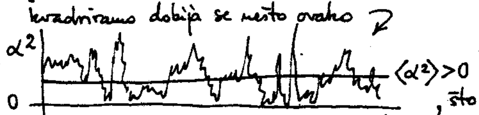
Vrlo važna karakteristika za primenu, otpor kalema $r\ (= \rho \cdot l/s)$ (v. niže) zavisi otigledno od ostalih konstrukcionih karakteristika. $\Rightarrow$ Optimizacija konstrukcije galv. je složen zadatak!

(16) GRANICA MERENJA USLOVLJENA TOPLOTNIM FLUKTUACIJAMA – ŠUMOVI

Usmeno li vrlo osetljiv galvanometar sa optičkim krakom od nekoliko metara videćemo da mu svetlosni spot iregularno osciluje (malom amplitudom) čak i u nultom položaju; kao da mu kroz namotaj prolazi neka slaba, odgovarajuća promenljiva struja. Slično tzv. šum postoji u svakom fiz. sistemu, pa i u svakom instrumentu. Šum je posledica čestične strukture materije i činjenica da je broj čestica materije u jedinici zapremine, zbog njihovog haotičnog (toplotnog) kretanja, promenljiv, ili da je, kako se to kaže, podložan fluktuacijama.

Srednja v-st ugaonog pomeranja ogledala galv. oko ravn. položaja, koje izgleda ovako ↴, jednaka je nuli: $\langle\alpha\rangle = 0$. Ako ova odstupanja kvadriramo dobija se nešto ovako ↙





, što ima pozitivno definitnu sr. v-st: $\langle\alpha^2\rangle > 0$.

Nemojte se truditi da u svakom sledećem merenju dobijete isti rezultat kao u prvom!

Kao mera intenziteta šuma zato se može uzeti koren iz ove sr. v-sti kvadrata pomeranja (da bi imalo iste dimenzije kao sama veličina) $\sqrt{\langle\alpha^2\rangle}$. To se kratko zove rms vrednost ("root mean square") ili punim imenom: "koren iz srednjeg kvadratnog odstupanja od srednje v-sti".
Teorijski, ovo nalazimo iz raspodele energije po stepenima slobode sistema. Ovaj sistem ima samo jedan stepen slobode – rotaciju oko jedne fiksne ose – pa pošto na svaki stepen slobode, na datoj apsolutnoj temp. T, dolazi u srednjem kin. energija $kT/2$ (k = Bolcmanova konst.), biće, zbog zakona održanja energije $\langle E_k\rangle = \langle E_p\rangle$ tj. $\frac{1}{2}kT = \frac{1}{2}C\langle\alpha_0^2\rangle$ gde je $\frac{1}{2}C\alpha^2$ potencijalna en. torzionog klatna konstante C zakrenutog za ugao α. Sledi da je $\langle\alpha_0^2\rangle = \frac{kT}{C}$, što i jeste srednji otklon koji rezultira iz neizbežno pripadajuće nulte energije po stepenu slobode. Iz j-ne osetljivosti galv., $i = \frac{C}{nBS}\cdot\alpha$, možemo naći koliko bi fluktuacija struje dala isti takav srednji otklon: $\langle i_0^2\rangle = \frac{C^2}{n^2B^2S^2}\langle\alpha_0^2\rangle = \frac{kT}{n^2B^2S^2}\cdot C$, odakle je:
$i_{eff} = \sqrt{\langle i_0^2\rangle} = \frac{\sqrt{kTC}}{nBS}$, što, za tipične kvalitetne v-sti daje $i_{eff} \simeq 10^{-12}$ A. Ova se struja naziva i efektivna struja šuma a njeno značenje je da se struja poredljiva sa njom, ili manja od nje, teško može meriti jer je, kako se to kaže, "utopljena u šum". Šumovi slične vrste su opšte prisutni i svuda ograničavaju osetljivost i tačnost merenja (v. Dodatak # 5). To znači da bi na, recimo, digitalnom instr. 12-ta cifra stalno "drhtala" i da se zbog toga promena struje na tom mestu ne bi mogla videti. Samo vrlo specijalni elektronski instr. mogu specijalnim tehnikama da mere struje do $\sim 10^{-17}$ A (samo nekoliko stotina e^-/s !) i napone do $\sim 10^{-10}$ V.

17 AMPERMETAR I VOLTMETAR

Značaj ovih instrumenata za merenje parametara i stanja električnih kola proističe iz činjenice da pri većini merenja ostale (neelektrične) veličine transformišemo u električne.

Oznake na instr. sa kretnim kalemom:

 $\simeq$ 1.5 (Klasa tačnosti: 0.1 ÷ 5) $\perp$ vert. ⊓ horiz. ☆5 probojni napon [kV]
LAB. IND

Ⓐ = **Ampermetar** skretanje kalema α pripisuje proticanju struje i kroz kalem; $\alpha = ki$

Ⓥ = **Voltmetar** skretanje pripisuje ne struji i kroz kalem već naponu $V = i\cdot r$ na otporu kalema r (napon je ionako primarna veličina a struja je posledica)

Ako max. otklon α_{max} = cela skala odgovara struji i_{max} kroz instrument onda instr. može da meri napon $V_{max} = r\cdot i_{max}$ (jer taj napon daje struju i_{max})

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Osetljivost Ⓥ i Ⓐ}\\ \text{ili}\\ \text{Karakteristični otpor Ⓥ}\end{matrix}\right\} = \underbrace{\frac{\text{cela skala}}{i_{max}}}_{=k_{A}} \cdot \frac{r}{r} = \underbrace{\frac{r}{V_{max}}}_{=k_{V}}\left[\frac{\Omega}{V}\right]\cdot\frac{i_{max}}{i_{max}} = \underbrace{\frac{V_{max}}{P_{max}}}_{=\text{Efikasnost}}\left[\frac{V}{W}\right]$$

gde je r = ukupan otpor instrumenta (kalem + šantovi)

$\Rightarrow$ Na datom opsegu:

$$\boxed{r_{V} = \text{Osetljivost}\left[\frac{\Omega}{V}\right]\cdot V_{max}[V]}$$

$\Rightarrow$ Za max skretanje instr. potrebna je snaga $\boxed{P_{max} = \frac{V_{max}}{\text{Osetljivost}}}$

u ono što teoretičar izračuna ne veruje niko osim njega samog. U ono što eksperimentalac izmeri veruju svi osim njega samog! (Kruži među fizičarima)

$\Rightarrow$ Instrument <u>veće osetljivosti</u> troši za svoj rad manju snagu, tj. <u>manje perturbira</u> sistem u koji je vezan. Pošto je snaga =

$P = ri^2 = V^2/r$ i pošto je za svaki otklon potrebna neka konačna snaga

$\Rightarrow$ Za merenje <u>malih struja</u> ($i \ll$) instrument <u>mora</u> da ima <u>veliki otpor</u> ($r_{Ⓐ} \gg$)

i za merenje <u>malih napona</u> ($V \ll$) instr. <u>mora</u> da ima <u>mali otpor</u> ($r_{Ⓥ} \ll$).

Inače, pošto se Ⓐ u kolo vezuje redno obično se zahteva da je $r_{Ⓐ}$ <u>što manje</u> (da bi perturbacija sistema instrumentom bila što manja -(cf. kasnije)) a pošto se Ⓥ vezuje paralelno traži se da je $r_{Ⓥ}$ <u>što veće</u>. Pošto za male i i V to <u>ne može</u> $\Rightarrow$ ∀ Ⓐ (sa $r_{Ⓐ}<$) je Ⓥ za male napone i ∀ Ⓥ (sa $r_{Ⓥ}>$) je Ⓐ za male struje

<u>Primer</u>: Osetljivost $k_{Ⓥ}$ = Karakt. otpor Ⓥ $= 20\,000\ \Omega/V$ $\Rightarrow$ (= Efikasnost) $\Rightarrow$

za $V_{max} = 100\,V$ $\quad r_{Ⓥ} = 20000 \frac{\Omega}{V} \cdot 100\,V = 2\times10^6\,\Omega$ $\quad P_{max} = \frac{V_{max}}{k_{Ⓥ}} = \frac{1}{200}\,\frac{V}{W}$

$V_{max} = 1\,V$ $\quad r_{Ⓥ} = 2\times10^4\,\Omega$ $\quad P_{max} = \frac{1}{20000}\,\frac{V}{W}$

$V_{max} = 1\,mV$ $\quad r_{Ⓥ} = 20\,\Omega$ $\quad P_{max} = \frac{1}{20000}\,\frac{mV}{W}$

Ako je najveća osetljivost Ⓐ $\simeq 10^{-11}A$ za $r_{Ⓐ} \simeq 1000\,\Omega \Rightarrow i^2 \cdot r_{Ⓐ} \simeq 10^{-19}\,W$

$\Rightarrow V^2/r_{Ⓥ} \simeq 10^{-19}\,W \Rightarrow$ Najveća osetljivost Ⓥ je $V \simeq \sqrt{10^{-19} r_{Ⓥ}} \simeq 3\times10^{-10}\sqrt{r_{Ⓥ}}$

$\simeq 10^{-9}\,V$ za $r_{Ⓥ} \simeq 10\,\Omega$ $\Rightarrow$

- Konačnost $r_{Ⓥ}$ i $r_{Ⓐ}$ uzrokuje neizbežne perturbacije sistema merenjem, tj. pojavu <u>sistematskih grešaka</u> usled primenjenog metoda. Izuzetak su <u>elektronski voltmetri</u> sa pojačavačima, te im za rad treba minimalna snaga od samog sistema jer većinu uzimaju od spoljašnjeg izvora, pa mogu da imaju ogromne unutrašnje otpore (do $\sim 10^{14}\,\Omega$). $\Rightarrow$

(18) GREŠKE INSTRUMENTA I METODE PRI MERENJU STRUJE I NAPONA

Razlikujemo greške rezultata merenja dve vrste: (tzv. sistematske - v. kasnije)

1) Greške usled konačne tačnosti kalibracije instrumenta, <u>instrumentalne greške</u> i

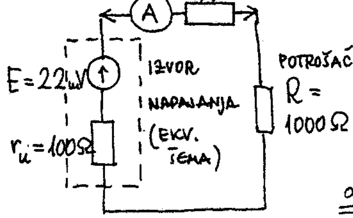
2) Greške usled metoda merenja - ili usled perturbacije (promene) sistema priključivanjem instrumenata - <u>metodske greške</u>

NB: Menjati više od jednog eksperimentalnog uslova odjednom loša je eksperimentalna praksa; tada je nemoguće odrediti jednoznačno uticaj pojedinačnog uslova..

ⓐ **MERENJE STRUJE** (Primer): Da bi što manje menjao kolo u koje se redno vezuje Ⓐ treba da ima što manje r_A, ali za merenje malih struja r_A mora biti relativno veliko ⇒

$K=1;\ I_{max}=50\mu A$

$r_A=2500\,\Omega$



$$I_{bez\,Ⓐ}=\frac{E}{R+r_u}=20\mu A$$ i to bi trebalo dobiti merenjem,

ali: $$I_{sa\,Ⓐ}=\frac{E}{R+r_u+r_A}=6.11\mu A\ !\ \Rightarrow$$

Otpor ukupni kola koji vidi Ⓐ kada se veže u kolo je:

$$R_{ulaz}=R+r_u$$

⇒ Greška metoda je (relativna) $$\delta_m=\frac{\Delta I}{I}=\frac{I_{sa\,Ⓐ}-I_{bez\,Ⓐ}}{I_{bez\,Ⓐ}}=$$

$$=\frac{1}{1+\frac{r_u+R}{r_A}}=\boxed{\frac{1}{1+\frac{R_{ulaz}}{r_A}}}=-69{,}5\%$$

⇒ Znajući R_{ulaz}/r_A znamo i δ_m te dobijeni rezultat $I_{sa\,Ⓐ}$ možemo korigovati:

$$\boxed{I_{bez\,Ⓐ}=\frac{I_{sa\,Ⓐ}}{1+\delta_m}}=\frac{6.11}{1-0.695}=20\mu A\ \Rightarrow$$

① Greška metoda je vrsta sistematske greške na koju je moguće izvršiti korekciju.

② Greška metoda se u pogodnim slučajevima može eliminisati jer

$$\delta_m\Big|_{r_A\to 0}\longrightarrow 0,$$ dakle kada se može ostvariti:

$$\boxed{r_A\ll R_{ulaz}}$$

③ Greška metoda, budući da je $f\left(\frac{R_{ulaz}}{r_A}\right)$, nije uvek ista(!) već zavisi od parametara kola!

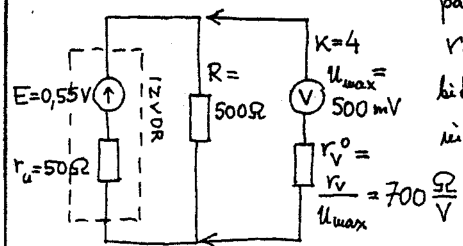
④ Greška metoda je mera perturbacije sistema merenjem, tj. vezivanjem instr. kolo više nije ono koje smo želeli da upoznamo već je to novi sistem.

Instrumentalna greška je (relativna) $$\delta_i=\boxed{\frac{I_{max}}{I_{sa\,Ⓐ}}\cdot K}=\frac{50}{6.11}\cdot 1\simeq 8\%$$

i predstavlja pravu grešku u poznavanju rezultata, grešku koja nema definisan smer – simetričnu grešku = pa rezultat sa greškom interpretiramo tako da smatramo da se stvarna vrednost merene veličine nalazi u intervalu $\pm\delta_i$ oko našeg rezultata. To je simetrična komponenta sistematske greške koja se ne može ni eliminisati ni korigovati!

NB: Imajući da je svaki eksperiment bar delimično put u nepoznato, zaključci se u njemu donose nizom sukcesivnih aproksimacija – metodom probe i greške –

⑥ **MERENJE NAPONA** (Primer): Da bi što manje menjao kolo u koje se paralelno veže Ⓥ treba da ima što veći r_V, ali za merenje malih napona r_V mora biti relativno malo (osim kod elektronskih instr. sa velikim eksternim pojačanjem) ⇒



$$\Rightarrow U_{bez\,Ⓥ} = IR = R\frac{E}{r_u+R} = 0{,}5\,V$$

Ekvivalentni otpor kola koga vidi Ⓥ je:

$$R_{ulaz} = \frac{r_u R}{r_u + R}$$

$$\text{ali } U_{sa\,Ⓥ} = i\cdot R_e = R_e\frac{E}{r_u+R_e} = U_{bez\,Ⓥ}\frac{r_V}{r_V+R_{ulaz}} = 0.442\,V$$

$$\text{gde je } R_e = \frac{r_V R}{r_V + R} \Rightarrow$$

sa Ⓥ otpor potrošača se smanji ($R_e < r_V, R$) pa struja poraste, poraste pad napona na izvoru a napon na R padne $\Rightarrow U_{sa\,Ⓥ} < U_{bez\,Ⓥ}$

$\Rightarrow$ Greška metoda je (relativna)

$$\delta_m = \frac{U_{sa\,Ⓥ} - U_{bez\,Ⓥ}}{U_{bez\,Ⓥ}} = \boxed{-\frac{1}{1+\frac{r_V}{R_{ulaz}}}} = -11.6\%$$

$\Rightarrow$ Korekcija se vrši kao:

$$\boxed{U_{bez\,Ⓥ} = \frac{U_{sa\,Ⓥ}}{1+\delta_m}}$$

a greška metode se eliminiše ako je $\boxed{r_V \gg R_{ulaz}}$

$$\left(\delta_m\Big|_{r_V\to\infty} \to 0\right)$$

i Instrumentalna greška je

$$\delta_i = \boxed{\frac{U_{max}}{U_{sa\,Ⓥ}}\cdot K} = 4{,}5\%$$

Sve ostalo važi isto kao za merenje struje.

Primer o minimizaciji instrumentalnih grešaka: U kolo su redno uključena dva

Ⓐ ① $K_1 = 0.5$ sa $I_{max1} = 30\,A$
② $K_2 = 1.5$ sa $I_{max2} = 5\,A$

i oba pokazuju $I = 4\,A$. Koji je rez. tačniji?

$$\Rightarrow \delta_{i1} = \frac{I_{max1}}{I}K_1 = 3.75\%$$
$$\delta_{i2} = \frac{I_{max2}}{I}K_2 \cong 1.9\%$$

⇒ Iako je prvi instrument manje klase tačnosti ipak je njegova instr. gr. veća!

⇒ Pravilo: Uvek birati takav opseg da rezultat bude blizu kraja opsega!

⑲ IZVORI NAPAJANJA - PRILAGOĐENJE IMPEDANSI

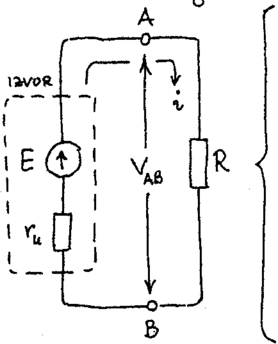
Svaki izvor napajanja (pa i svaki aktivni merni pretvarač koji na račun snage uzete iz merenog sistema generiše elektromotornu silu) se na osnovu teorema ekvivalentnosti može svesti samo na svoje dve unutrašnje karakteristike:

"Svrha svake teorije je da nam ukaže na izvođenje takvih eksperimenata koji pod određenim okolnostima mogu da joj protivureče, pa makoliko nam se ta teorija dopadala" Herman Bondi

1) Elektromotornu silu, E

2) Unutrašnji otpor, r_u

i, kada se zatvori u neko električno kolo, svoju spoljašnju karakteristiku, odnosno zavisnost razlike potencijala – napona – na njegovim krajevima od spoljašnjeg otpora u kolu (otpora potrošača) ili od jačine struje u kolu. Opšta šema izvora vezanog u kolo je:



Očigledno, napon na izvoru jednak je padu napona na potrošaču, tj. $V \equiv V_{AB} = iR$. Kako je, po Omovom zakonu,
$i = \dfrac{E}{R+r_u} \Rightarrow E = iR + ir_u = V + ir_u$ odnosno: $\boxed{V = E - ir_u}$

Ovo čitamo: Napon na izvoru jednak je EMS smanjenoj za pad napona na izvoru, a pad napona na izvoru (iz $i = E/(R+r_u)$) je tim veći, odnosno napon na izvoru manji, što je struja u kolu jača, tj. otpor potrošača manji ("vučeš struju – obaraš napon").

U ovom iskazu sadržana je glavna veština korišćenja izvora napajanja i linearnih električnih kola. Uz $i = E/(R+r_u)$ možemo ga prepisati kao:

$$\boxed{V(i) = E \cdot \left(1 - \frac{1}{1+\frac{R}{r_u}}\right) = f\left(\frac{R}{r_u}\right)} \quad \circledast$$

$\Rightarrow$ Zaključak: Zavisnost napona izvora od struje koja se iz njega "vuče" je linearna i može se naći iz samo dve tačke. Napon na izvoru zavisi od odnosa otpora potrošača i unutrašnjeg otpora izvora. Dakle, kada se dve komponente povežu formira se novo kolo koje može biti bitno različito od prethodnog, ili: osobine jedne komponente zavise od toga za šta se ona veruje. Iz j-ne $\circledast$ vidi se da su dve karakteristične tačke spoljašnje karakteristike izvora sledeće:

1) $R = \infty$ (prekinuto kolo, režim praznog hoda); $i_{ph} = 0$; $V(0) \equiv V_{ph} = E$

2) $R = 0$ (režim kratkog spoja); $i_{ks} = E/r_u$; $V(i_{ks}) \equiv V_{ks} = E - r_u i_{ks} = 0$

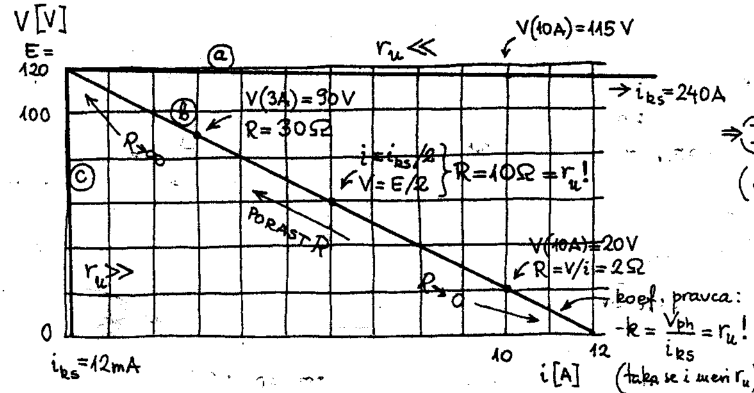
Koje mogućnosti postoje najbolje ćemo razumeti na konkretnim primerima.

Primer: Data su tri izvora napajanja:

Unutrašnje karakteristike		$\Rightarrow$ Spoljašnje karakteristike: Prazni hod	Kratki spoj
a) $E = 120\ V$	$r_u = 0{,}5\ \Omega$	$V_{ph} = E$	$i_{ks} = E/r_u = 240\ A \Rightarrow$ max struja velika
b) $E = 120\ V$	$r_u = 10\ \Omega$	$V_{ph} = E$	$i_{ks} = 12\ A$
c) $E = 120\ V$	$r_u = 10\ k\Omega$	$V_{ph} = E$	$i_{ks} = 0.012\ A \Rightarrow$ max struja mala

Pogledajmo im spoljašnje karakteristike:

"Postoji niz lepih pojava koje eksperimenti neočekivano otkrivaju čak i kada mislite da već sve razumete. Superprovodnost je takav primer. Ne verujem da bi je ni onaj ko bi znao svu relevantnu fiziku ikada predvideo" J.W.Cronin, Phys. Today, July 1982.



⇒ (I) Izvori sa $r_u \ll$ (tj. dok je $R \gg r_u$) imaju napon na izvoru u velikom opsegu otpora potrošača praktično stalan ($V \simeq E$) (u "gornjem" delu karakteristike) i to su <u>izvori napona</u> (naponski izvori) koji, u principu, mogu da daju i velike struje [zbog $r_u \ll$ obično su fizički veliki. Kratak spoj ih samouništava, npr. olovni akumulatori].

⇓

(II) Izvori sa $r_u \gg$ (tj. dok je $R \ll r_u$) daju struju koja se u velikom opsegu otpora potrošača praktično ne menja ($i \simeq i_{ks}$) (u "donjem" delu karakteristike) i to su <u>izvori struje</u> (strujni izvori). Zbog $r_u \gg$ oni, međutim, daju male struje [zbog $r_u \gg$ su i fizički mali, npr. suvi elementi]

"- Elektronski regulisani izvori napajanja mogu biti oba tipa. ⇒

(I) Ako je <u>napon</u> koji daje izvor (merni pretvarač, ili prethodni stepen) veličina koja nosi željenu informaciju, tj. ako želimo da u potrošač (instrument, ili sledeći stepen) <u>bez promena prenesemo napon</u> (tj. bez sistematskih grešaka) tada <u>otpornost sledećeg stepena mora biti mnogo veća od otpornosti prethodnog stepena</u> (tj. ulazna impedansa sledećeg stepena treba da je mnogo veća od izlazne impedanse prethodnog (impedansa umesto otpor, da se obuhvati i slučaj promenljivih struja)).

(II) Ako je <u>struja</u> koju daje izvor (merni pretvarač, ili prethodni stepen) veličina koja nosi relevantnu informaciju, tj. ako želimo da u potrošač (instrument, ili sledeći stepen) <u>bez promena prenosemo struju</u> (tj. bez sist. gr.) tada <u>otpornost sledećeg stepena mora biti mnogo manja od otpornosti prethodnog stepena.</u>

⇒ Za veran prenos mernog signala potrebne su <u>prilagođene impedanse</u>, inače dolazi do sistem. grešaka!

Iz ovoga proističe, recimo, klasifikacija elektronskih pojačavača:

R_{ulaz}	Simbol	R_{izlaz}	(radi povezivanja u lanac istovrsnih komponenti)
∞	V → V	0	Pojačavač napona (instrumentalni, ulaz, da ne perturbira sistem, izlaz, za indikat. instr.)
0	i → i	∞	Strujni pojačavač
∞	V → i	∞	Konvertor napona u struju
0	i → V	0	Konvertor struje u napon

Radi potreba prilagođenja, impedanse se često <u>transformišu</u>.

"Kada eliminišete nemoguće, ono što ostane, makako izgledalo neverovatno, mora biti tačno"
Sir Arthur Conan Doyle

Prenos snage: Za optimalan prenos snage potrebni su drugačiji uslovi:

$$\text{Iz } V = E - ir_u \,/\cdot i \;\Rightarrow\; \underbrace{Ei}_{\substack{\text{Snaga izvora}\\ =\text{Ukupna energ. oslob. u s}}} = \underbrace{Vi}_{\substack{\text{Snaga potrošača}\\ =\text{korisna energ. u s}}} + \underbrace{i^2 r_u}_{\substack{\text{Snaga gubitaka}\\ \text{u izvoru}}}$$

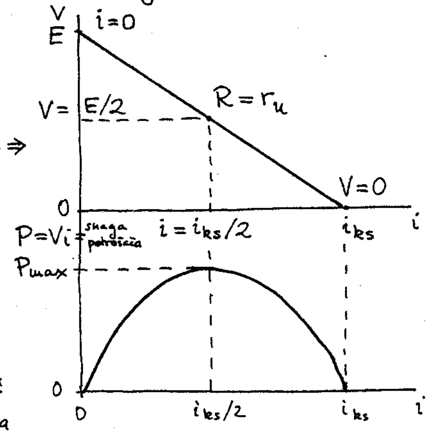
$\Rightarrow$ Koeficijent korisnog dejstva $\Big\} \equiv \eta = \dfrac{\text{Korisna snaga}}{\text{Ukupna snaga}} = \dfrac{V}{E}$

$\Rightarrow$ Snaga potrošača $P = Vi = (E - r_u i)\dfrac{E}{R + r_u} \Rightarrow$

je max za $\boxed{R = r_u}$, kada je $V = E/2$,

$i = i_{ks}/2 = E/2r_u \;\Rightarrow\; P_{max} = V \cdot i = E^2/4r_u$

i tada je $\eta_{max} = V/E = 1/2 = 50\%$!



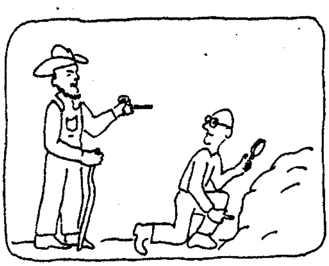
$\Rightarrow$ Prenos snage sa stepena na stepen je maksimalan (50%) kada je ulazna impedansa sledećeg stepena jednaka izlaznoj impedansi prethodnog stepena (tada se po polovina snage oslobađa u svakom stepenu)

Promena spoljašnje kar. izvora u zavisnosti od opterećenja samo je jedan primer kako osobine sistema zavise od toga za šta je on interaktivno vezan, tj. kako se mereni sistem perturbira priključivanjem mernog sistema. "Prilagođenje impedansi" je, dakle, sa gledišta problema merenja, način da se "hardverski" minimizira (a nekada i eliminiše) sistematska greška zbog interakcije merenog i mernog sistema, tj da se minimizira perturbacija sistema merenjem. Ostatak, zbog "neprilagođenih impedansi", se mora korigovati "softverski", tj. uračunati kao sistematska greška u proceduri obrade rezultata merenja. Ovo je, inače, opšti problem koji se javlja pri sprezanju svih fiz. sistema u njihov funkcionalni lanac (nešto više o tome u Dodatku #7).

(20) KODEKS PREDSTAVLJANJA EKSPERIMENTALNIH REZULTATA

Do sada smo već upoznali čitav niz razloga zbog kojih se rezultati merenja fiz. v-na, iako smatramo da je većina njih suštinski definisana nad skupom realnih brojeva, uvek moraju izražavati samo konačnim brojem cifara (i to najčešće nevelikim!). Osnovni način pisanja rezultata merenja je da se prikažu samo one cifre za koje smo se kalibracijom uverili da su zaista tolike, kao i da u merenju nijedna od njih ne fluktuira. Ako izdrže sve provere i ako se uverimo da su zaista tolike tada ih zovemo sigurnim ciframa rezultata a za rezultat koji je prikazan samo svojim sigurnim ciframa kažemo da je prikazan sa implicitnom greškom.

Poslednje, najmanje vredno cifarsko mesto rezultata tada definiše implicitnu grešku na sledeći način:

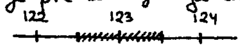


"$1.0 \times 10^6 + 10 \neq 1000010$!"

– Tvrdim da ne znate da je ta stena stara milion i deset godina!
– A otkud vi to znate?
– Pre deset godina jedan drugi naučnik je proučavao tu stenu i rekao mi je da je stara milion godina!
(Шварц и Голдфарб)

$\Rightarrow$ NB: Ni nesigurne nule rezultata se nikad ne pišu!

NB: Kada je eksperiment jednom završen nikakvom obradom rezultata ne možete iz njih izvući ništa više no što u njima već ne postoji; dakle, prvenstveno se trudite da u eksperimentu sve bude u redu!

To što na mestu iza ove poslednje cifre sledeća ne postoji samo znači da ne znamo koliko je – jer da je znamo mi bismo je i napisali. Recimo da je naš rezultat 0.0123. To što je na zadnjem mestu trojka znači da smo sigurni da nije ni dvojka ni četvorka, tj. da rezultat nije ni 0.0122 ni 0.0124. Pošto se rezultat dobija ili u direktnom merenju zaokruživanjem čitanja na najbliži podeok, ili zaokruživanjem broja dobijenim raznim računskim operacijama, to znači da je pre utvrđivanja zadnje sigurne cifre (trojke) rezultat bio negde u šrafiranom intervalu 

. Da je bio van tog intervala levo pisali bismo ga kao 0.0122 a desno kao 0.0124. Taj interval u kome nam se rezultat <u>sigurno</u> nalazi (u tom smislu se i poslednja cifra zove sigurnom, iako se ona može promeniti ako se broj sigurnih cifara poveća!) ako je napisan samo sa svojim sigurnim ciframa i definiše implicitnu grešku rezultata, i to kao polovinu tog intervala.

Dakle:

Implicitna greška rezultata jednaka je polovini vrednosti njegovog poslednjeg cifarskog mesta.

(Vidi se da ovo odgovara definiciji instrumentalne greške kao polovini vrednosti najmanjeg podeoka ili polovini vrednosti poslednjeg cifarskog mesta.) Svaki eksp. rez. je dakle <u>interval</u>.

- Što je broj sigurnih cifara u rezultatu veći, odnosno ovaj interval uži, rezultat je

<u>TAČNIJI</u>.

Ovaj način pisanja rezultata (sa impl. gr.) češće se koristi za tehnička merenja ili za merenja manje tačnosti. Ako je tačnost merenja velika (visoka), što je u eksp. fizici obično slučaj, obično vredi da se i greška rezultata, odnosno interval u kome se on nalazi, bolje proceni. Tako bolje procenjenu grešku, odnosno interval, zovemo <u>eksplicitnom greškom</u>.

Ako bismo rezultat sa implicitnom greškom želeli da prikažemo kao onaj sa eksplicitnom gr. onda bismo ga pisali sa nulom na mestu iza poslednje sigurne cifre, koju bismo onda zvali nesigurnom, ali <u>značajnom</u>, cifrom i obavezno sa pridruženom greškom na tom cifarskom mestu – u našem primeru to bi izgledalo kao: 0.01230 ± 0.00005 ili $(1.230 \pm 0.005) \times 10^{-2}$ ili, što danas zbog pogodnosti pisanja na računaru, sve češće izgleda kao: $1.230(5) \times 10^{-2}$ ili čak kao: 1.230(5)e−2. Svi ovi načini pisanja bili bi ekvivalentni onom sa implicitnom greškom: $0.0123 \equiv 1.23 \times 10^{-2} \equiv$ 1.23e−2.

- Za rezultat koji ima <u>n sigurnih cifara</u> kažemo da ima <u>tačnost reda 10^{-n}</u>, što je jednako <u>redu veličine relativne greške rezultata</u>, odnosno količnika greške i rezultata. U našem primeru u kome nam rezultat ima 3 sigurne cifre tačnost je reda $10^{-3} \equiv 1‰$ (promil) a relativna greška je $5/1230 \approx 4‰$. Tačnosti sa specijalnim imenima su: procent (10^{-2}), promil (10^{-3}), ppm ("part per <u>mil</u>lion) (10^{-6}), ppb (part per <u>bil</u>lion) (10^{-9}). Tačnosti od procenta i promila su <u>niske</u>, od ppm <u>visoke</u>, od ppb i više <u>vrlo visoke</u>.

Tačnost rezultata je osnovni kriterijum kvaliteta eksperimenta!

Ako smo rešili da grešku (interval) rezultata procenimo <u>bolje</u> no što je to samo broj sigurnih cifara, tj. ako smo rešili da odredimo <u>eksplicitnu grešku</u>, onda za to u svakom konkretnom slučaju postoje odgovarajuće procedure koje i jesu osnovni predmet našeg daljeg izlaganja. No, bez obzira o kojoj se vrsti eksplicitne greške radilo ona se uvek prikazuje uz poštovanje istih pravila. Ona su:

Naučnika koji je citirao svoju grešku kao 1 u 1000 su pitali šta predstavljaju tri cifre koje je naveo. "Veru, Nadu i Milostinju" – odgovorio je on. L. Lyons 1991

- U najvećem broju situacija (v. kasnije) i eksplicitna greška se (kao i implicitna, samo to više ne mora da bude 5 nego bilo koja cifra) piše samo sa jednom značajnom cifrom. Izuzetno, ako smo se jako potrudili da je još bolje odredimo (ako je za to bilo dobrog razloga!) eksplicitna greška može da ima i dve značajne cifre. Tada se u rezultatu zadržavaju i one nesigurne (ali značajne) cifre koje su, kako se to kaže, "pokrivene greškom", naprimer:

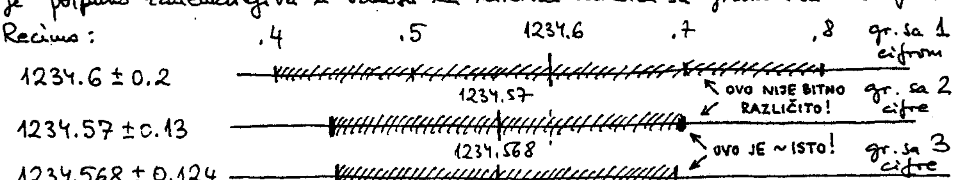
$$0.01236\,(3) \qquad \text{ili} \qquad 0.012358\,(22).$$

Pošto se eksplicitna greška uvek samo procenjuje i pošto je uvek rezultat nekog računa to se ona pri zaokruživanju na jednu (ili izuzetno dve) cifru često majorira, tj. zaokružuje na najbližu veću vrednost sa datim brojem cifara. Redosled operacija je pritom kao u ovoj tabeli:

① Nađeni rezultat →	② Nađena greška →	③ Konačna greška →	④ Konačni rezultat
Broj dobijen datom procedurom iz rezultata merenja (sirovih podataka- "raw data") i računom te ima proizvoljan broj cifara, npr:	Greške su uvek "procenjuju" na osnovu nekog računa takođe sa proizv. brojem cifara, npr:	Zadržavamo samo jednu ili izuzetno dve značajne cifre greške, uz eventualnu majorizaciju:	Rezultat, uz obično matematičko zaokruživanje, zadržava poslednju značajnu cifru na mestu poslednje značajne cifre greške:
1 234.567890 cm	12.3456789 cm	2×10^{1} cm	$(123\pm2)\times10^{1}$ cm $\equiv 123(2)\times10^{1}$ cm
		ili 13 cm	(1235 ± 13) cm $\equiv 1235(13)$ cm
	ili: 0.123456789 cm	0.2 cm	(1234.6 ± 0.2) cm $\equiv 1.2346(2)\times10^{3}$ cm
		ili 0.13 cm	(1234.57 ± 0.13) cm $\equiv 1.23457(13)\times10^{3}$ cm
	ili: 1.23456789 cm	2 cm	(1234 ± 2) cm $\equiv 1234(2)$ cm
		ili 1.3 cm	(1234.6 ± 1.3) cm $\equiv 1234.6(13)$ cm

Iz ovih primera vidi se dovoljno jasno zašto se u grešci nikad ne zadržava više od dve značajne cifre – interval u kome se rez. nalazi kada gr. ima dve cifre već se beznačajno razlikuje od onog kad gr. ima jednu cifru. Sa tri cifre promena intervala je potpuno zanemarljiva u odnosu na interval određen sa greškom sa dve cifre.

Recimo:



Naravoučenije iz svega ovoga glasi: Povećavajte broj cifara u rezultatu a ne u grešci!

Konačno, evo preliminarne interpretacije eksp. rez. citiranog sa svojom greškom:

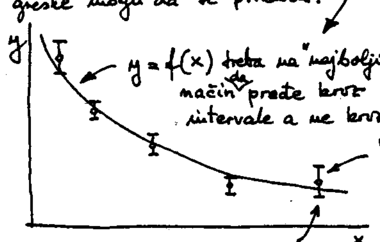
> Eksperimentalni rezultat sa greškom definiše interval u kome se, sa određenom verovatnoćom (o tome više kasnije), nalazi stvarna vrednost veličine koju smo merili.

"Common Sense in Errors!" G.L. Squires

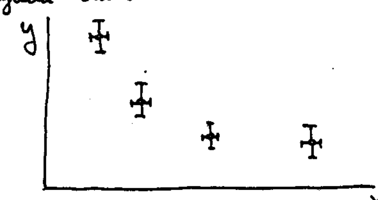
Eksperimentalni rezultati ne predstavljaju se samo numerički već i grafički. Kao što se numerički uvek predstavljaju sa svojim greškama dobra je praksa da se to radi i u njihovom grafičkom predstavljanju. Rezultat predstavljen tačkom u principu ekvivalentan je rezultatu koji je numerički predstavljen kao realan broj, sa beskonačno svojih cifara i to, prema tome, nema smisla. Rezultat je uvek interval. Druga je stvar, međutim, ako nam je razmera takva da se intervali ne mogu nacrtati (ili da rezolucija ekrana to ne dozvoljava) – tada je dozvoljeno da rezultati budu predstavljeni tačkama, ali tekstualna napomena to mora da objasni.

Najčešća situacija je da se za nezavisno promenljivu (x) izabere ona veličina koja može da se najbolje kontroliše i najtačnije meri, i njene greške najčešće ne može da se prikaže grafički, dok se razmera za prikazivanje zavisno promenljive v-ne (y) bira tako da greške mogu da se prikažu.

Ako i greške po X mogu prikazati to izgleda ovako



horizontalna crtica može da predstavlja moć razlaganja po X, ali ne mora!



što implicira da naši rezultati ustvari određuju niz polja u x-y ravni.

(21) VRSTE EKSPERIMENTALNIH GREŠAKA

Postoje dve, po poreklu i prirodi, različite vrste eksp. gr. To su:

SISTEMATSKE GREŠKE i **SLUČAJNE (ili STATISTIČKE) GREŠKE**

SISTEMATSKE GREŠKE koje su stalne i poznato promenljive i mogu biti:

1) TEORIJSKE, greške metoda (npr. neuračunavanje r_A i r_V), perturbacija sistema merenjem, rad i račun po jednoj teoriji (formuli) a za sistem koji smo u eksperim. ustvari realizovali važi neka druga (npr. ako prostom klatnu damo veliku amplitudu a g računamo iz $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$). Ove su greške asimetrične i zbog njih je rezultat jednostavno pogrešan ⇒ To je nedozvoljena sist. gr. i ona ne sme da ostane u finalnom rezultatu. Ona se mora ili (hardverski) eliminisati ili na nju (softverski) korigovati (primer za r_A i r_V smo već diskutovali).

SLUČAJNE (ili STATISTIČKE) GREŠKE koje su stohastične (stohastičnost = istost uslova ali različitost ishoda, sa tim da je svakom ishodu određena verovatnoća pojavljivanja). Manifestuju se kao različitost rezultata iz merenja ponovljenih pod maksimalno moguće identičnim uslovima. Uzrokuju ih:

1) STABILNOST EKSPERIMENTALNIH USLOVA: tj. varijacije početnih i graničnih uslova u merenom sistemu i interakcije sa okolinom: temp. stabilnost (a temp. utiče na sve!), varijacije pritiska, magn. polja, itd. Tu se mogu svrstati i neke sistematske gr. usled driftova, histerezisa, itd. koje se često mogu randomizovati, i pretvoriti u slučajne gr. (v. kasnije). Sve ovo se može popravljati, ali samo do izvesne mere i spada u delimično reducibilne izvore slučajne gr.

NB: Deo fizike sutrašnjice je u nesigurnim ciframa današnjice!

NB: Generacije koje dolaze prinuđene su da mere sve manje i manje efekte, tj. sve tačnije i tačnije – zato smanjivanju i preciznom definisanju eksperimentalnih grešaka posvećujemo sve veću i veću pažnju!

2) <u>INSTRUMENTALNE</u>, uglavnom greške usled konačne tačnosti kalibracije, linearnosti, itd. određene najmanjim podeokom ("least count"), moći razlaganja, klasom tačnosti. Ona određuje broj sigurnih cifara rezultata i ne može se ukinuti. Eksplicitno se prikazuje kao simetrična (±) sistematska gr.

3) <u>BROJČANE</u>; zbog loših v-sti konstanti, parametara koji karakterišu sredine, itd. tj. zbog konačnog broja cifara u dim v-nama, od kojih zavise sve ostale – ili: tačnost svih rezultata u datoj epohi je uzajamno usaglašena! Otud važi stav da se <u>u datoj epohi ne može prevazići tačnost</u> koja je u <u>fizici globalno dostignuta</u> (npr. 1750. g. sve su poznate v-ne imale 1–2 sigurne cifre a danas 6–10). I ova komponenta sist. gr. je neizbežna i doprinosi konačnoj sistematskoj grešci rezultata.

4) <u>LIČNE</u>, koje su kao i u kuvarci, jednostavno <u>zabranjene</u>.

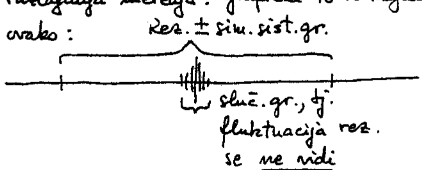
2) <u>PRECIZNOST INSTRUMENATA</u>, (reproducibilnost) usled trenja, mrtvog hoda, histerezisa, prelaznih otpornosti kontakata, itd. I to su <u>delimično reducibilni</u> izvori sluč. gr.

3) <u>INHERENTNA STOHASTIČNOST POJAVA</u>, Ovde spadaju <u>ireducibilne komponente</u> sluč. gr. usled čestične strukture materije (fluktuacije, šumovi) i usled suštinskog probabilističkog karaktera pojava u mikrosvetu, tj. izlazi da je za sve mikrosisteme i mikroprocese principijelno moguće <u>egzaktno</u> upoznati (i eksperimentalno i teorijski) u okvirima kvantnih teorija) <u>samo verovatnoće</u> gde, kada i sa kakvim ishodom će se nešto dogoditi a da egzaktni dinamički determinizam važi samo za srednje vrednosti veličina koje su distribuirane sa odgovarajućim raspodelama gustine v-će. Stepen poznavanja je pritom veći (tj. slučajna greška manja) što je broj identičnih ponovljenih merenja – realizacija (u vremenu ili po ansamblu – ergodička teorema) veći. Ako broj merenja → ∞ slučajna greška → ∅ (relativno!), tj. srednje v-sti postaju egzaktno poznate.

~o~

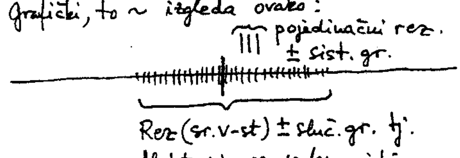
Ove dve vrste grešaka, sistematske i slučajne, često se međusobno isključuju, odnosno jedna biva dovoljno veća tako da se ona druga može zanemariti.

- Sistematska gr. najčešće dominira u merenjima relativno niske tačnosti, male osetljivosti, kada ponavljanje merenja daje praktično iste rezultate, odnosno kada je fluktuacija rezultata unutar moći razlaganja merenja. Grafički to ~ izgleda ovako:



To je uglavnom situacija u tehničkim merenjima.

- Slučajna gr. javlja se u merenjima visoke tačnosti, kada fluktuacija rezultata postaje primetna i kada neuklonjivi nemir mikrosveta može da dođe do izražaja. Ogromna većina merenja u fizici danas je ovog tipa – sve ono što se merilo malom tačnošću odavno je izmereno i interpretirano, ostale su uglavnom "koske", tj. fini efekti višeg reda. Grafički, to ~ izgleda ovako:



Smanjenje slučajne gr. povećanjem broja merenja vredi raditi dok ova ne postane poredljiva sa rezidualnom simetričnom sistematskom gr.

• U oba slučaja interval koje definiše greška interpretira se tako da je stvarni rezultat negde u tom intervalu, sa određenom verovatnoćom (za sistematsku grešku sigurno, v-ća 1, za slučajnu grešku sa nekom v-ćom < 1, koja se zove nivo poverenja, "confidence level", skraćeno CL). (v. kasnije).

• Kada su sist. i slu. gr. poredljive tada se ili mogu citirati odvojeno, ili se mogu na određeni način kombinovati u jedinstvenu grešku (o ove dve "škole" citiranja grešaka v. kasnije).

(22) ZAŠTO EKSPERIMENTALNE GREŠKE?

Ima bar 9 razloga zašto se petljamo sa eksp. greškama:

0.) Zato što su one, hteli mi to ili ne, uvek tu!

1.) Da bi se znalo kojim ciframa rezultata treba da se veruje a kojim ne

2.) Zbog toga što je:

$$\text{RELATIVNA GREŠKA} \propto \frac{1}{\text{CENA (u smislu uloženog truda, novca i vremena)}}$$

odnosno, samo veličina relativne greške (tačnost rezultata) daje smisao svemu onome što je uloženo u njegovo dobijanje, ili: ono što u eksperimentu košta to su sigurne cifre rezultata. Obično se kaže da svaka nova sigurna cifra povećava cenu eksperimenta za red veličine:

1.23456789.(...) ← cif. mesta koja danas nikakav novac ne može da kupi! (ali sutra ...?)

← Jeftina cif. mesta Skupa →

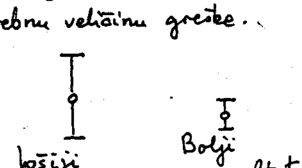
3.) Efekti (pojave) se javljaju na datom decimalnom mestu i da bi se videli ne smeju da budu "pokriveni" eksp. greškom, tj. treba da se jave na sigurnoj cifri rezultata - što traži određenu tačnost. ("Mali efekti" zahtevaju visoku tačnost). To je svaki put osnovni kriterijum za izbor tačnosti odnosno veličinu greške kojoj se mora težiti. Pošto su svi veliki efekti davno upoznati fizika je sve skuplja i skuplja. Kaže se da je fizika sutrašnjice u nesigurnim ciframa današnjice:

1.23456789(...)(...) ← Efekti možda vidljivi sutra! → Efekti koje možda nikad nećemo eksplicitno videti?

← Veliki efekti Mali →

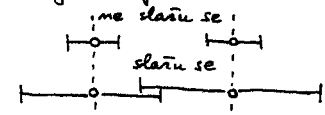
4.) Da bi se znalo kada je dato merenje ili eksp. uopšte gotov. Eksp. je gotov tek kada dostignemo potrebnu tačnost rezultata, odnosno potrebnu veličinu greške.

5.) Da bi se imala kvantitativna mera kvaliteta eksperimenta ili: eksp. rezultat vrednovan je svojom tačnošću (brojem sigurnih cifara ili relativnom greškom):

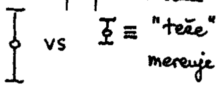


"Stvari vrede onoliko koliko je vremena u njih uloženo" S. Exipery, "Mali Princ"

6.) Da bi se imao kriterijum o slaganju različitih rezultata za istu stvar. Dva rezultata mogu da se slažu ili ne slažu, u zavisnosti od veličina njihovih grešaka:
Prvi intuitivno jasni kriterijum kaže da se rezultati slažu ako im se intervali definisani greškama bar delimično preklapaju (v. kasnije).



7.) Da bi se uopšte mogla tražiti srednja vrednost (tj. jedinstveni predstavnik) većeg broja rezultata različitih merenja i eksperimenata za istu stvar, pridruživanjem "težine" rezultatu, koja je obrnuto proporcionalna kvadratu njegove greške (v. kasnije). Takvo usrednjavanje dovodi i do smanjenja greške srednje v-sti u odnosu na greške svih parcijalnih rezultata. Zato i vredi jedno te isto meriti sve iznova i iznova. Nove tablične v-sti imaju sve manje greške a u sebi sadrže sva ranija merenja.



8.) Da se, imajući sve ovo u vidu, a na osnovu procene potrebne tačnosti, tj. greške, <u>planira eksperiment</u>: da se unapred izaberu instrumenti odgovarajuće tačnosti (klase), preciznosti, itd; metodi merenja; odgovarajuće stabilišu eksp. uslovi; planira potreban broj merenja i trajanje eksperimenta; da se vidi da li je sve to operaciono i finansijski moguće (tzv. studija izvodljivosti = "feasibility study"). ⇒ Podjednako je važno umeti: unapred proceniti i planirati:

a) Sâm rezultat i proceduru za njegovo dobijanje i
b) Eksperiment. grešku, tj. tačnost tog rezultata i proceduru za njeno dobijanje.

Ekspert je onaj ko sve ovo dobro poznaje, uspešno procenjuje i odgovarajuće realizuje!

• I sistematske i slučajne greške različito se procenjuju u slučajevima direktnog, indirektnog i parametarskog merenja. Krenimo redom:

> **ZLATNO PRAVILO EKSPERIMENTALNE FIZIKE:**
> Nešto se može smatrati pouzdano izmerenim tek kada se rezultati bar dva metodološki različita eksperimenta unutar sebi svojstvenih i nezavisno a priori procenjenih sistematskih grešaka slože.

(23) PROCENA SISTEMATSKE GREŠKE DIREKTNOG I INDIREKTNOG MERENJA

(a) DIREKTNO MERENJE:

Direktna merenja su ishodišta svih indirektnih i parametarskih merenja i svih eksperimenata a time i sveg našeg egzaktnog znanja o prirodi, a sistematske greške tih merenja su mera kvaliteta tog znanja. Prosto je nemoguće dovoljno naglasiti njihov značaj. Do sada smo diskutovali praktično sve aspekte tog problema. Sada evo samo kratke rekapitulacije. Dakle, posle:

1) (Hardware) <u>eliminacije</u> i/ili
2) (Software) <u>korekcije</u>

teorijskih sistematskih grešaka u mernoj proceduri (npr. eliminacija uticaja r_A i r_V pomoću $r_A \to 0$ i $r_V \to \infty$ ili računske korekcije na njihove konačne vrednosti)

"Kada je eksperiment završen i rezultati objavljeni duplikate originalnih laboratorijskih dnevnika treba sačuvati ::: oni su jedini potpun zapis o rezultatima napora ljudi – godina i mnogih hiljada dolara njihovog novca ..." B. Taylor et al, Rev. Mod. Phys. 41 (1969) 2

3) Ostatak sistematske greške (instrumentalna, kalibraciona gr.) prikazuje se uz rezultat u formi simetrične ($\pm$) greške, najčešće na osnovu klase tačnosti ili polovine najmanjeg podeoka (ili zadnjeg cifarskog mesta), sa interpretacijom: Stvarna v-st rezultata nalazi se, sa istom verovatnoćom nejde u intervalu [citirani rezultat $\pm$ sistematska greška] pri čemu ta greška može biti bilo eksplicitna bilo implicitna.

⑥ INDIREKTNO MERENJE:

Indirektno merenje ustvari podrazumeva korišćenje date "formule" za računsko nalaženje vrednosti koju bi neka veličina trebalo da ima u datoj eksp. situaciji na osnovu rezultata direktnih merenja drugih veličina od kojih ona u toj formuli zavisi, pod bitnom pretpostavkom da ta formula zaista predstavlja veran opis situacije koja je pred nama (što inače uopšte ne mora da bude slučaj i, u manjoj ili većoj meri, nikad i nije!).

To je, dakle, mesto gde je:

1) Hardware <u>eliminacija</u> i/ili
2) Software <u>korekcija</u>

} teorijskih sistematskih grešaka, tj. dovođenje sistema koji je pred nama u sklad sa njegovim teorijskim opisom, tj. pretpostavljenom formulom, od najvećeg značaja (npr. eliminacija korišćenjem malih amplituda kod određivanja g klatnom, ili korekcija korišćenjem popravki izraza $T=2\pi\sqrt{l/g}$ za velike amplitude).

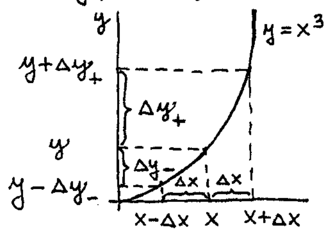
Kada je jednom ovo urađeno pitanje je kako naći preostalu sistematsku grešku takvog izračunatog rezultata na osnovu izvornih grešaka direktno merenih v-na iz kojih je ovaj i dobijen; drugim rečima, <u>ako početni podaci poseduju određenu tačnost, kolika je tačnost onoga što smo iz njih izračunali?</u> U tom cilju pretpost. da je ind. mer. v-na y određena po datoj zavisnosti $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ iz vrednosti dir. merenih v-na $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (to ne moraju biti rez. naših merenja, mogu biti bilo koje fiz. konstante, itd) koje su date sa svojim sistematskim greškama $\Delta x_1,\Delta x_2,\ldots,\Delta x_n$, bilo implicitnim, bilo eksplicitnim. Kako, dakle, neizvesnosti u poznavanju v-na x_i, Δx_i, utiču na neizvesnost poznavanja v-ne y, tj. na neko Δy? (Još se kaže da greška Δy "propagira" iz grešaka Δx_i). (Treba reći da ponavljanje merenja ovde ne igra nikakvu ulogu - radi se o jedinstvenom skupu rezultata x_i).

Pogledaćemo prvo najjednostavniji slučaj kada y zavisi od samo jedne varijable x, koja je data sa svojom sist. gr. Δx. Problem je kako da nađemo Δy? Rešenje je, očigledno, trivijalno:

Recimo da imamo pred sobom veliku kocku kojoj želimo da saznamo zapreminu (toliko veliku da ne možemo da je potopimo u raspoloživ sud). Recimo dalje da smo joj izmerili sve ivice i da smo našli da su joj do na moć razlaganja merila, Δx, sve ivice iste dužine x. Takođe recimo da smo se raspoloživim uglovnim merilima uverili da su joj svi temeni uglovi, do na moć razlaganja tih merila, pravi. Tada možemo da primenimo formulu (zakon) Euklidove geometrije (prve velike fizičke teorije) koja kaže da je zapremina kocke $y=x^3$. (Pitanje odnosa teorijske greške zbog odstupanja od

Hiperfina frekvencija vodonika je 1420 405 751.768 Hz ("21 cm") i sve te cifre su izračunljive iz kvantne elektrodinamike!

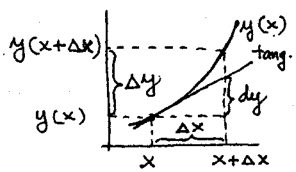
"kockastosti", tj. greške zbog korišćenja izraza x^3, i greške usled konačne tačnosti merenja dužine ivice, Δx, je daleko od jednostavnog a pominjemo ga da bismo pokazali da i svaki naizgled trivijalan problem uvek postaje komplikovan kada se želi visoka tačnost, i njena bolja specifikacija). Dakle, ako zavisnost $y(x)$ prikažemo grafički, u ovom slučaju $y = x^3$, sa



slike odmah vidimo kako se po ovoj funkciji greška za x preslikava u grešku za y. To je direktno i egzaktno rešenje našeg problema. Vidimo da se, čim funkcija nije linearna, simetrični interval za x preslikava u asimetrični interval za y, tj. da y sa greškom treba da se piše kao: $y^{+\Delta y_+}_{-\Delta y_-}$. (Npr. za $x = 10 \pm 1$ ovde je $y = 1000^{+331}_{-271} = (10^{+4}_{-3}) \times 10^2$)

Iako je ovo jednostavno, i tačno, tako se međutim gotovo nikad ne radi! Zašto?

→ Kao prvo (relativne) greške su obično male (merenja uglavnom samo tada imaju smisla!) a u malom intervalu oko date tačke svaka se funkcija zadovoljavajuće može aproksimirati linearnom zavisnošću, odnosno tangentom u datoj tački (prvi član Taylorovog reda),



tj. konačni priraštaj funkcije Δy diferencijalom dy (za $\Delta x = dx$) što je jasno sa slike, tj; za $\Delta x \ll$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \simeq \frac{\Delta y}{\Delta x}, \text{ odnosno:}$$

$$\Delta y \simeq \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x .$$

Drugim rečima: Greška indirektno merene veličine $y = f(x)$ približno je jednaka vrednosti prvog izvoda funkcije y u tački x = Rezultat pomnoženom greškom direktno merene veličine x, tj.:

$$\boxed{\Delta y \simeq \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\text{Rez.}} \cdot \Delta x} \qquad (*)$$

Ova aproksimacija korisna je jer daje univerzalni recept za dobijanje analitičkog izraza za grešku indirektno merene v-ne, koji se može analizirati sa ciljem njene optimizacije.

U našem primeru egzaktne asimetrične greške su:

$$\Delta y_+ = y(x+\Delta x) - y(x) = 3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\Delta y_- = y(x) - y(x-\Delta x) = 3x^2 \Delta x - 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

te se vidi da se aproksimativni izraz izračunat po formuli (*), $\Delta y = 3x^2 \Delta x$, dobija ako se u njima zanemare male veličine drugog i trećeg reda (čak i u našem brojnom primeru, gde je greška čitavih 10%, korišćenje aproks. izraza (*) daje $\Delta y = 300$, što je sasvim prihvatljivo u odnosu na egzaktne greške od $\Delta y_+ = 331$ i $\Delta y_- = 271$!).

Takođe, imajući u vidu da se i greške za x samo procenjuju, insistiranje na apsolutnoj egzaktnosti propagacije Δy najčešće je neumesno. Tome se pribegava samo izuzetno, kada smo tome posvetili maksimalnu pažnju, i kada je to sve zajedno opravdano.

I u grešci indirektno merene veličine, pogotovo imajući u vidu aproksimacije koje činimo u njenom nalaženju, takođe zadržavamo uglavnom jednu a samo jako izuzetno i dve značajne cifre.

NB: Sve se događa tačno onako kako se događa, i nikad nikako drugačije! – truizam koga je u eksperimentalnog fizičara uvek korisno biti svestan.

Uopštenje na opšti slučaj kada veličina y zavisi od <u>više direktno merenih varijabli</u> x_i je složeno jer simultano dejstvo grešaka Δx_i na vrednost veličine y <u>nije jednoznačno</u> određeno (recimo, neko pozitivno odstupanje može da poveća a neko da smanji rezultat). Jedino što se može proceniti jeste <u>maksimalna</u> sistematska greška v-ne y koja bi rezultirala iz <u>simultanog najnepovoljnijeg</u> delovanja pojedinačnih grešaka $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. ⇒ Direktno uopštenje aproksimacije (*) na slučaj funkcije više promenljivih daje upravo to - zbir maksimalnih doprinosa pojedinačnih grešaka:

$$\boxed{\Delta y \simeq \left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|_{x_1, x_2, \dots, x_n} \Delta x_1 + \left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|_{x_1, x_2, \dots, x_n} \Delta x_2 + \dots + \left|\frac{\partial y}{\partial x_n}\right|_{x_1, x_2, \dots, x_n} \Delta x_n} \qquad (**)$$

gde je $\left|\frac{\partial y}{\partial x_i}\right|_{x_1, x_2, \dots, x_n} \Delta x_i$ apsolutna vrednost parcijalnog izvoda f-je y po varijabli x_i u tački $x_1, x_2, \dots, x_n$ pomnožena greškom varijable x_i. Bolji opšteważeći recept ne može se dati, iako je sigurno da će ponekada ovo dati nerealno veliku grešku; ali zahtev za tačnijom procenom najčešće nije opravdan. Gornji izraz možemo pročitati kao:

> Sistematska greška izračunate veličine y jednaka je zbiru grešaka direktno merenih veličina otežinjenih brzinama promene funkcije y u tačkama x_i. Dakle, najbrža parcijalna zavisnost potencijalno najviše doprinosi grešci Δy.

Setimo se još jednom da se isto ovako nalazi i tačnost ma koje veličine izračunate iz parcijalnih vrednosti datih tačnosti.

- <u>Specijalni tablični slučajevi</u>, na koje se, rastavljanjem, mogu prosto svesti mnogi realni slučajevi:

$y = x_1 \pm x_2$ $\qquad \Delta y = \Delta x_1 + \Delta x_2$

aps. gr. = zbir aps. gr.

$\left.\begin{array}{l} y = x_1 \cdot x_2 \\ y = x_1 / x_2 \end{array}\right\}$ $\qquad \dfrac{\Delta y}{y} = \dfrac{\Delta x_1}{x_1} + \dfrac{\Delta x_2}{x_2}$

rel. gr. = zbir rel. gr.

$y = x^n$ $\qquad \dfrac{\Delta y}{y} = n \dfrac{\Delta x}{x}$

rel. gr. = n × rel. gr.

$y = kx$ $\qquad \Delta y = k \Delta x$

$y = \ln x$ $\qquad \Delta y = \dfrac{\Delta x}{x}$

aps. gr. = rel. gr.

$y = e^x$ $\qquad \dfrac{\Delta y}{y} = \Delta x$

rel. gr. = aps. gr.

Primer nalaženja za proizvod:

$y = x_1 x_2$

$\dfrac{\partial y}{\partial x_1} = x_2 \qquad \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = x_1$

$\Delta y = x_2 \Delta x_1 + x_1 \Delta x_2 \,/ : y = x_1 x_2$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{y} = \dfrac{\Delta x_1}{x_1} + \dfrac{\Delta x_2}{x_2}$

Ove tablične slučajeve korisno je znati napamet!

Jednostavan primer primene: $y = 3a/b^2 \Rightarrow y = \frac{A}{B}, \ \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta a}{a} + 2\frac{\Delta b}{b}$.

Jednostavan BASIC program koji koristi algoritam (**) v. u Dodatku # 10

"Činjenice ne prestaju da postoje time što ih zanemarujemo" A. Huxley

Elementarni ilustrativni primeri :

① $d_1 = 1.36$ cm , $d_2 = 4$ cm , $d_3 = 1.5$ cm

$d = d_1 + d_2 + d_3 = 1.36 + 4 + 1.5 = 6.86$ cm $= 7$ cm, zbog d_2, jer je $\Delta d_2 = 0.5$ cm a u zbiru je greška rez. bar tolika, tj. grešku zbira određuje rez. sa najvećom aps. gr. Brza procena je da rez. ima poslednju sig. cifru na mestu sig. cifre broja sa najvećim (najstarijim) cif. mestom (ovde 4). Da je bilo $d_2 = 4.00$ i $d_3 = 1.50$ bilo bi $d = 6.86$.

② $m = 5.45$ kg, $v = 9.1$ m/s, $r = 10.26$ m $\Rightarrow$ $mvr = 5.45 \times 9.1 \times 10.26 = 508.8447 = 51 \times 10^1$ kgm²/s, zbog v, jer rel. gr. proizvoda određuje rez. sa najvećom rel. gr. tj. rel. gr. proizvoda je bar tolika. Brza procena je da rez. ima onoliko sig. cifara koliko i broj sa najmanje sig. cifara (bez obzira na dec. zapetu).

③ Zašto se period oscilovanja meri za vreme trajanja većeg broja oscilacija, recimo 50, pa deljenjem sa 50, kada je greška merenja svakog vremenskog intervala ista, i jednaka recimo ΔT? (Period $= \tau$, Vreme za 50 osc. $= T$ sa greškom ΔT) $\Rightarrow$

$$\tau = \frac{T}{50} \quad i \quad \Delta\tau = \frac{\Delta T}{50}$$, što znači "tačnije određen period".

④ Greška razlike je zbir grešaka, npr :

$d_1 = (100 \pm 2)$ m, $d_2 = (96 \pm 2)$ m $\Rightarrow$ iako su obe dužine određene dobro, sa 2% svaka, razlika $y = d_1 - d_2 = 4 \pm 4$ je praktično neupotrebljiva jer ima grešku od 100%. Ovo ukazuje na opasnost diferencijalnih metoda, a neizbežno je kod svih "malih efekata na visokom fonu". Ako interval rezultata tada obuhvata nulu, to se smatra da se na toj tačnosti efekt ne vidi, tj. ne postoji. Povećanje tačnosti, međutim, može da suzi interval i dâ nenulti rezultat.

⑤ $U = (1000 \pm 25)$ V (2.5%), $R = (10 \pm 1)\,\Omega$ (10%) $\Rightarrow$ $I = \frac{U}{R} = 100$ A $\qquad \frac{\Delta I}{I} = 10\% + 2.5\% = 12.5\%$

$\Rightarrow$ Ako negde može da se smanji greška, gde je bolje prepoloviti je? Evidentno, prepoloviti grešku za U praktično ne vredi (a teže je!) dok prepolovljavanje gr. za R praktično prepolovi i grešku rezultata.

⑥ Traži se masa cilindričnog dela sa parametrima :

$r = (10.1 \pm 0.1)$ cm, $h = 100$ cm, $\rho = 1.12$ g/cm³

$m = \rho V = \pi r^2 h \rho$ a po opštem izrazu (**)

$$\Delta m = \pi r^2 h \Delta\rho + 2r\pi\rho h \Delta r + \pi r^2 \rho \Delta h + \cancel{r^2 h \rho \Delta\pi} \; / : m \Rightarrow$$

$\cancel{}$, ako se π uzme na mnogo dec.

$$\Rightarrow \frac{\Delta m}{m} = \underbrace{\frac{\Delta\rho}{\rho} + 2\frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta h}{h}}_{\text{što se inače odmah dobija primenom tabličnih slučajeva}} = 0.5\% + 2\% + 0.5\% = 3\%$$

$\Rightarrow m = 35893$, $\Delta m = 1077$ $\Rightarrow$ $m = 3.6(1) \times 10^4$ g. Naravoučenije je da greški najviše doprinosi gr. u r, zbog kvadratne zavisnosti koja je ovde najbrža $\Rightarrow$ Najtačnije treba meriti najbržu zavisnost a rastuće brzine f-ja su: LOG $\rightarrow$ STEPEN $\rightarrow$ EXP.

ⓒ PARAMETARSKO MERENJE:

Određivanje grešaka veličina nađenih parametarskim metodom na osnovu direktnih merenja veličina koja poseduju sistematske greške diskutovaćemo kasnije, kada budemo govorili o tom istom problemu u slučaju kada direktno merene veličine poseduju slučajne greške. (v. str. 78)

(24) DISTRIBUCIJA GUSTINE VEROVATNOĆE POJAVLJIVANJA REZULTATA DIREKTNO MERENE VELIČINE

Dakle, kao što rekosmo:

1) Delimično reducibilna stohastičnost:
a) Stabilnost eksperimentalnih uslova
b) Preciznost instrumenata, i
2) Ireducibilna stohastičnost:
a) Diskretnost materije (fluktuacije, šumovi)
b) Kvantnomehanička stohastičnost (definisane su samo distribucije gustina verovatnoće nalaženja u prostoru, vremenu, prostoru impulsa, itd)

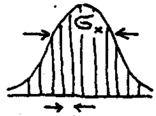
dovode do rasturа eksperimentalnih vrednosti fizičkih veličina pri ponovljenim merenjima pod inače maksimalno moguće identičnim uslovima. Svaki eksp. rez. je u datom sistemu (ispitivani sistem + merni sistem) stvarno svaki put drugačiji – delom zbog ireducibilne stohastičnosti same pojave ("sopstvena" ili "prirodna širina") a delom zbog parcijalno reducibilne stohastičnosti instrumenata i merenja ("instrumentalna širina"). ⇒

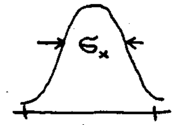
Eksperimentalni rezultati su slučajne varijable!

(Slučajna varijabla je ona čija se sledeća vrednost nikako ne može predvideti na bazi poznatih prošlih vrednosti te veličine, ali se može predvideti verovatnoća pojavljivanja date vrednosti (za diskretne varijable) ili pojavljivanja u datom intervalu (za kontinualne varijable) – a sve to ili na osnovu nekog modela ili teorije ("a priori") ili na bazi eksperimentalno upoznate raspodele verovatnoće ("a posteriori"), putem merenja frekvencija pojavljivanja rezultata u datim intervalima (frekventna interpretacija verovatnoće). ⇒

> Svaka fizička veličina u eksperimentu je slučajna varijabla koja ima svoju distribuciju (gustine) verovatnoće pojavljivanja, što se može opaziti uvek kada je osetljivost dovoljna ⊛, a koju upoznajemo ("uzorkujemo") ponavljanjem merenja, i to tim bolje što je broj merenja veći, pa odatle procenjujemo parametre analitičkog oblika te raspodele:
> 1. Srednju vrednost, koja i jeste traženi eksperimentalni rezultat, i
> 2. Disperziju (meru "širine" distribucije), koja je baza za nalaženje slučajne greške rezultata koja definiše interval u kome se stvarna vrednost rezultata nalazi sa datom verovatnoćom.

⊛ Šta operaciono znači: "...kada je osetljivost dovoljna"? Ako je ΔX = moć razlaganja eksp., a σ_x = neka mera širine raspodele pojavljivanja rezultata smatra se da je "osetljivost dovoljna" za ispoljavanje slučajnog karaktera rezultata i pouzdanu statističku obradu ako je $\Delta X \lesssim \sigma_x/4$ (što, bar za mali broj merenja, znači da je sluč. gr > sist. gr). Ako je, međutim, celokupna fluktuacija rezultata manja od moći razlaganja instrumenta, tada je slučajna greška zanemarljiva



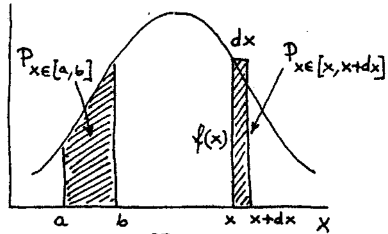


Varijable sa skupom diskretnih vrednosti (recimo celobrojne, kao što su odbroji definisanih događaja) opisane su diskretnim distribucijama verovatnoće (recimo binomijalnom ili Poasonovom) a one sa kontinuiranim skupom v-sti (realnim br.) kontinuiranim distribucijama gustine verovatnoće. Pošto se diskretne najčešće mogu aproksimirati kontinuiranim to ćemo, bar za sada, pogledati samo njih: ⇒

• DISTRIBUCIJA GUSTINE VEROVATNOĆE $f(x) = \frac{dP}{dx}$

definisana je tako da je $dP = f(x)dx$ v-ća da x bude u intervalu od x do $x+dx$ ($P_{x\in[x,x+dx]}$) a v-ća da se x nađe u konačnom intervalu od a do b, je:

$$P_{x\in[a,b]} = \int_a^b f(x)dx \,.$$



Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, odnosno distr. normirana, to je deo od ukupnog broja merenja koji pada u interval a,b.

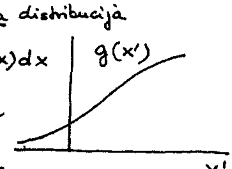
Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)dx = N$ onda je N = konstanta normiranja, pa je $f(x) = \frac{1}{N} f'(x)$ normirana.

⇒ Bazična pretpostavka je da $f(x)$ stvarno postoji u našem eksperimentu i mi je upoznajemo merenjima, koristeći frekvencionističku interpretaciju v-će.

tzv. integralna distribucija

$$g(x') = \int_{-\infty}^{x'} f(x)dx$$

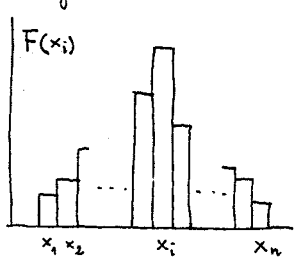
daje v-ću za $x \leq x'$



V-ća za dobijanje tačne v-sti a je:

$$P_{x=a} = \int_a^a f(x)dx \equiv \emptyset \,!$$

Pošto je tačnost očitavanja veličine X uvek konačna to se ova raspodela uvek "uzorkuje" u konačnom broju diskretnih tačaka x_i, koje kao da čine sredine intervala od jedne do druge v-sti x_i (⟵ x_i — x_{i+1} ⟶) (što je povezano i sa ("dovoljnom osetljivošću")). Takođe, pošto je ukupan broj merenja N uvek konačan $f(x)$ se može samo bolje ili gore upoznati preko veličina $f(x_i)$ preko kojih i upoznajemo njene parametre (kada bi $n \to \infty$ distribuciju bismo upoznali egzaktno, a time i njene parametre!, v. kasnije). Ako je broj intervala na koje je opseg pojavljivanja rez. (podeljen) jednak n a veličine $F(x_i)$ $(i=1,2,\dots,n)$ jednake broju pojavljivanja rezultata u i-tom intervalu (učestanosti pojavljivanja ili nenormirane težine) biće $\sum_1^n F(x_i) = N$. Ove veličine predstavljamo histogramom, aproksimacijom stvarne distr. gush. v-će:



Jedinstvena reprezentativna vrednost skupa svih N merenja je njihova aritmetička srednja vrednost:

$$\langle x\rangle = \frac{F(x_1)x_1 + F(x_2)x_2 + \dots + F(x_n)x_n}{N} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}$$

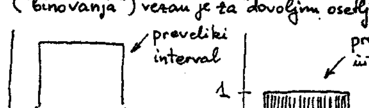
$$= \frac{1}{N}\sum_1^n F(x_i)x_i = \sum_1^n \underbrace{\frac{F(x_i)}{N}}_{\substack{\text{normirane} \\ f(x_i) = \text{učestanosti (težine)}}} x_i = \sum_1^n f(x_i)x_i$$

jer je:

$$\sum_1^n f(x_i) = \sum_1^n \frac{F(x_i)}{N} = \frac{1}{N}\underbrace{\sum_1^n F(x_i)}_{=N} = 1$$

NB: I pravilo sumiranja: Konstanta prolazi kroz znak Σ!

Problem optimizacije veličine intervala ("binovanja") vezan je za "dovoljnu osetljivost":



Usrednjavanje po histogramu (po ansamblu) $\langle x\rangle = \sum_1^n f(x_i)x_i$ ekvivalentno je usrednjavanju po vremenu ("tekuća" sr. v-st)

$$\langle x\rangle = \frac{1}{N}\sum_1^N x_i$$

Verovatnoća nije ništa drugo do broj koji se dobija kao limes relativne učestanosti pri beskonačno velikom broju posmatranja – Zakon velikih brojeva

Veličine $f(x_i)$ su procene stvarnih v-sti distr. $f(x)$, odnosno procene v-će nalaženja veličine x u intervalu x_i. Sr. v-st $\langle x \rangle = \sum_1^m f(x_i)\, x_i$ zove se još i otežinjena ("ponderisana") sr. v-st. jer je "privučena" najverovatnijoj ("najtežoj") vrednosti x_i (za razliku od sistematskih grešaka, koje daju uniformne raspodele gust. v-će, slučajne greške uvek imaju "zvonaste" raspodele koje preferiraju neke vrednosti). [Srednja vrednost makoje funkcije $g(x)$, ako je x distribuirano po $f(x)$, je uopštenjem $\langle g \rangle = \sum_1^m g(x_i) f(x_i)$ ili, u limesu u kontinuum $\langle g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx$]. Srednja vrednost distribucije, $\langle x \rangle$, je njen prvi i osnovni parametar. Šta je kvantitativna mera rastura rezultata, tj. širine raspodele?

⇒ Pokažimo da to ne može da bude sr. v-st svih odstupanja od sr. v-sti:

Neka je odstupanje i-te v-sti $d_i = x_i - \langle x \rangle$ i ako posmatramo svih N mer. pojedinačno biće:

$$\frac{1}{N}\sum_1^N d_i = \frac{1}{N}\sum_1^N (x_i - \langle x \rangle) = \frac{1}{N}\sum_1^N x_i - \frac{1}{N}\sum_1^N \langle x \rangle = \langle x \rangle - \frac{\langle x \rangle}{N}\underbrace{\sum_1^N 1}_{N} = \emptyset$$

NB: II pravilo sumiranja: $\sum_1^N \mathrm{const} = N \cdot \mathrm{const}$

Dakle: 1. Sr. v-st svih odstupanja od sr. v-sti je uvek nula

2. Zbir svih "prebačaja" i "podbačaja" oko $\langle x \rangle$ jednak je nuli

⇒ Pokažimo dalje 3/ da sr. v-st minimizira zbir kvadrata odstupanja, tj. da je zbir kvadrata odstupanja od sr. v-sti manji od zbira kvadrata odstupanja od ma koje druge v-sti a. Nađimo

$$\frac{d}{da}\sum_1^N (x_i - a)^2 = \frac{d}{da}\left\{\sum_1^N x_i^2 - 2a\sum_1^N x_i + \sum_1^N a^2\right\} = -2\sum_1^N x_i + 2aN$$ i izjednačimo sa $\emptyset$:

$$-2\sum_1^N x_i + 2aN = \emptyset \Rightarrow a = \frac{1}{N}\sum_1^N x_i = \langle x \rangle \quad \text{QED.}$$

Prema tome, kao mera širine raspodele može se uzeti upravo srednja v-st kvadrata odstupanja od sr. v-sti (disperzija, varijansa ili srednje kvadratno odstupanje):

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_1^N (x_i - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{N}\left\{\sum x_i^2 - 2\langle x \rangle \sum x_i + \sum \langle x \rangle^2\right\} = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle\langle x \rangle + \frac{\langle x \rangle^2}{N} N$$

$$= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sum_1^m f(x_i)(x_i - \langle x \rangle)^2 = \frac{\sum_1^m F(x_i)(x_i - \langle x \rangle)^2}{\sum_1^m F(x_i)}$$

odnosno standardna devijacija (ili rms v-st,) koren iz srednjeg kvadratnog odstupanja):

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_1^N (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

Iako se deli sa N (kao uostalom svaka sr. v-st) ni ova veličina se ne smanjuje kada broj merenja N raste, već se samo povećava kvalitet njenog poznavanja. Ona je drugi inherentni parametar distribucije koji se može smanjiti samo promenom distribucije, tj. redukcijom reducibilne komponente slučajne greške tj. povećanjem preciznosti merenja.

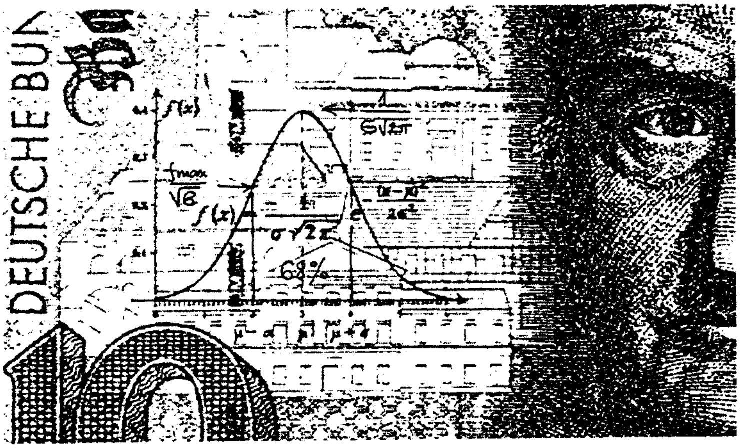
Izrazi za $\langle x \rangle$ i σ preko N merenih v-sti x_i samo su procene parametara stvarne distribucije $f(x)$, koje su tim bolje što je N veće, tj. ako se sa tako određenim v-stima za $\langle x \rangle$ i σ uđe u analitički izraz za pretpostavljeni tip distribucije (a sve su dvoparametarske) tok tako dobijene funkcije bolje će se slagati sa njenim eksp. tokom (histogramom) što je broj merenja N veći (za ovo slaganje postoje i kvantitativni stat. kriterijumi - χ^2). Način na koji se fluktuacije $\langle x \rangle$ i σ smanjuju sa rastom N diskutovaćemo malo kasnije.

"... kao statističar koji se udavio u jezeru koje je u proseku duboko 15 cm" Anonimus

"Svi veruju u eksponencijalni (normalni) zakon grešaka; eksperimentalci zato što misle da se može dokazati matematikom; matematičari zato što veruju da je zasnovan na posmatranjima" E.T. Wittaker

Najčešća distribucija rezultata u fizici je tzv. normalna (gauss-ova) raspodela (ili "Gausijan") (v. novčanicu od 10 DEM) ↗ U našoj notaciji oblik joj je :

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}}}$$



a osnovne osobine su:

1) Simetrična oko $\langle x\rangle$

2) Ima max u $\langle x\rangle$:

$$f(\langle x\rangle)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\propto\frac{1}{\sigma}\,!$$

3) Brzo teži nuli za $|x-\langle x\rangle|>\sigma$

Može se proveriti da je:

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x f(x)\,dx \quad i$$

$$\langle(x-\langle x\rangle)^2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\langle x\rangle)^2 f(x)\,dx=\sigma^2$$

Standardna normalna raspodela : $N(0,1)$ [u opštem slučaju oznaka je $N(\langle x\rangle,\sigma)$] ima $\langle x\rangle=0$ i $\sigma=1$ što se postiže smenom $t=\frac{x-\langle x\rangle}{\sigma}$; $dx=\sigma dt \Rightarrow$

$$\boxed{N(0,1)=f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-t^2/2}}$$

Od interesa su verovatnoće da se rezultat nađe u intervalu $x\in[\langle x\rangle-T\sigma,\langle x\rangle+T\sigma]$ što je uz smenu $x=\langle x\rangle\pm T\sigma \Rightarrow t=\frac{\langle x\rangle\pm T\sigma-\langle x\rangle}{\sigma}=\pm T$

jednako : $\boxed{P_{T\sigma}=\int_{-T}^{+T}f(t)\,dt}$ što je tabelirano pod imenom "integrala verovatnoće" ⇒

T	$P_{T\sigma}$	T	$P_{T\sigma}$	T	$P_{T\sigma}$	T	$P_{T\sigma}$	T	$P_{T\sigma}$	T	$P_{T\sigma}$	T	$P_{T\sigma}$
0.00	0.0000	0.40	0.3108	0.80	0.5763	1.20	0.7699	1.60	0.8904	2.1	0.9643	2.9	0.9963
0.05	0.0399	0.45	0.3473	0.85	0.6047	1.25	0.7887	1.65	0.9011	2.2	0.9722	3.0	0.99730
0.10	0.0797	0.50	0.3829	0.90	0.6319	1.30	0.8064	1.70	0.9109	2.3	0.9786	3.5	0.99953
0.15	0.1192	0.55	0.4177	0.95	0.6519	1.35	0.8230	1.75	0.9199	2.4	0.9836	4.0	0.99994
0.20	0.1585	0.60	0.4515	1.00	0.6827	1.40	0.8385	1.80	0.9281	2.5	0.9876		
0.25	0.1974	0.65	0.4843	1.05	0.7063	1.45	0.8529	1.85	0.9357	2.6	0.9907		
0.30	0.2358	0.70	0.5161	1.10	0.7287	1.50	0.8664	1.90	0.9426	2.7	0.9931		
0.35	0.2737	0.75	0.5467	1.15	0.7499	1.55	0.8789	2.0	0.9545	2.8	0.9949		

Zaokružene su najčešće korišćene v-sti integrala verovatnoće, a njegovo značenje je sledeće: $P_{T\sigma}$ = v-ća da se rezultat nađe u $\langle x\rangle\pm T\sigma$ tj. $P_{T\sigma}$ % rezultata pada u interval $\langle x\rangle\pm T\sigma$. Vidi se da u interval $\pm 3\sigma$ pada 99.73% rezultata, tj. da od 1000 njih u proseku samo 3 izlaze van tog intervala (osnov za tzv. "3σ" kriterijum). Interval od $T=1.65$ ($\langle x\rangle \pm 1.65\sigma$) u kome se nalazi 90% resultata često se koristi jer ima najbolji odnos: verovatnoća / veličina intervala. Fizičari se obično zadovoljavaju ovim intervalnim procentima koji u ~~srednjem~~ treba da budu zadovoljeni pri kontroli normalnosti raspodele svojih rezultata (mada za to postoje egzaktniji kriterijumi) a te distribucije su najčešće normalne zbog važenja tzv. centralne granične teoreme koja kaže da će nešto što zavisi od većeg broja proizvoljno distribuiranih v-na biti normalno distribuirano. (Ima, međutim, puno očiglednih primera "nenormalnih" raspodela – recimo, ako se kuglice selektuju po masi distribucija po masi će biti normalna ali po dijametru neće ($m \propto d^3$), kao i obratno $\Rightarrow$ Ipak uvek treba biti oprezan!).

Konačno, procene parametara distribucije na osnovu N rezultata merenja su:

$$\langle x\rangle = \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} x_i \quad ;$$

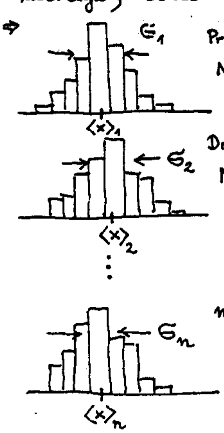
$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{1}^{N}\left(x_i - \langle x\rangle\right)^2} \qquad (\circledast)$$

Faktor $1/(N-1)$ u σ umesto $1/N$ (što očito ima značaja samo za $N \ll$) u egzaktnom tretmanu potiče otud što sve devijacije nisu nezavisne – isti podaci prethodno su iskorišćeni za nalaženje $\langle x\rangle$ pa je broj nezavisnih devijacija samo $N-1$ (tzv. Yates-ova korekcija).

Nalaženje procena ovih parametara je u današnje vreme olakšano postojanjem "scientific calculatora" koji imaju ugrađene "hard" programe koji se zovu SD ili SD1 u kojima se podaci ubacuju pritiskom na određeni taster a pritiskom na druge tastere pozivaju rezultati za n (broj rezultata), $\bar{x}$ (sr.v-st), σ_n (st. dev. sa $1/N$) i σ_{n-1} (st. dev. sa $1/(N-1)$).

(25.) SLUČAJNA GREŠKA DIREKTNO MERENE VELIČINE (Standardna greška srednje vrednosti)

Već smo više puta (ali toga nikad dosta!) napomenuli da se sr.v-st i st.dev. upoznaju tim tačnije što je broj merenja veći, jer su i $\langle x\rangle$ i σ slučajne varijable koje, prema tome, imaju svoje odgovarajuće distr. gust. v-će pojavljivanja. Pitanje je koliki su parametri tih distribucija? Pošto je za određivanje jednog para v-sti $\langle x\rangle$ i σ potrebno izvršiti jednu grupu od N merenja to je za upoznavanje ovih distribucija potrebno izvršiti veći broj ovakvih grupa merenja, recimo n njih, sa rezultujućim skupom v-sti $\langle x\rangle_i$ i σ_i ($i=1,2,\dots,n$):

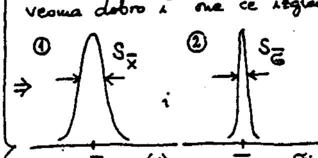


Prva grupa od N merenja

Druga grupa od N merenja

n-ta grupa od N merenja

Ako je $n \gg$ distribucije sr.v-sti i st.dev. ćemo upoznati veoma dobro i one će izgledati kao:



a njihovi parametri će biti:

① Distribucije sr.v-sti:

a) Srednja v-st svih parcijalnih sr.v-sti ("velika sr.v-st" ili "grand mean") $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\langle x\rangle_i$

b) St.dev. ove distr. $S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\left(\bar{x}-\langle x\rangle_i\right)^2$ i

② Distribucije st. devijacija:

a) Sr.v-st svih parcijalnih st.dev. $\bar{\sigma} = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\sigma_i$

b) St.dev. ove distr.: $S_{\bar{\sigma}}^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}\left(\bar{\sigma}-\sigma_i\right)^2$.

Snaga fizike je u njenoj egzaktnoj prediktivnoj moći. Čak i u suštinski stohastičnim pojavama predviđanje distribucija gustina verovatnoće je egzaktno.

Kao što ćemo malo kasnije pokazati, među ovim v-nama postoje sledeće veze:

$$\boxed{S_{\bar{x}} = \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{N}} \quad i \quad S_{\overline{\sigma}} = \frac{\overline{\sigma}}{\sqrt{2N}}}$$

Dakle, širine ovih distribucija obrnuto su proporcionalne korenu iz broja merenja N unutar jedne grupe merenja, i to je način na koji tačnost upoznavanja distribucije rezultata zavisi od broja njenog uzorkovanja, N.

Rezultat ovakve serije od n puta po N merenja bio bi dat u formi $\bar{x} \pm S_{\bar{x}}$, pri čemu se $S_{\bar{x}}$, st. dev. raspodele sr. v-sti, zove još i standardna greška ("velike") srednje v-sti i predstavlja interval oko sr. v-sti sr. v-sti u kome se nalazi 68% svih sr. v-sti. Ona predstavlja ono što nazivamo slučajnom greškom konačnog rezultata $\bar{x}$ (sada nam je jasno da to nije nikakva "greška" već objektivno svojstvo celog eksperimenta). Standardna greška nalazi se preko sr. v-sti st. devijacija $\overline{\sigma}$ a "greška" ove srednje st. dev, $S_{\overline{\sigma}}$, služi nam da procenimo tačnost u poznavanju standardne greške, da bismo mogli da joj odredimo broj sigurnih cifara. Pošto je relativna greška srednje st. dev. $S_{\overline{\sigma}}/\overline{\sigma} = 1/\sqrt{2N}$ vidimo da je i za $N=100$ (što je već vrlo veliki broj merenja) ona jednaka ~ 7% te da u svim realnim situacijama više od dve sigurne cifre nemaju smisla u standardnoj grešci, a da je u najčešćem slučaju od nekoliko desetina merenja u standardnoj greški opravdano zadržati samo jednu cifru.

- U svim realnim situacijama, međutim, grupa od N merenja nikad se ne ponavlja! (mada se $\forall$ grupa od N merenja uvek može smatrati sastavljenom od n grupa od po $m = N/n$ merenja, što može biti korisno za proveru statističnosti (v. kasnije)). Sve čime raspolažemo jeste skup od N merenja $x_1, x_2, \dots, x_N$ sa jedinstvenom srednjom vrednošću $\langle x \rangle$ i standardnom devijacijom σ (procenjenim po izrazu ⊛) pa jedino što može da se uradi jeste da se te vrednosti uzmu kao procene za $\bar{x}$ i $\overline{\sigma}$, sa tim što će se i $\sigma/\sqrt{N}$ uzeti kao procena za $S_{\bar{x}}$. Konačan rezultat naše serije od N merenja se, dakle, piše u formi: $\boxed{\langle x \rangle \pm \sigma/\sqrt{N}}$ sa interpretacijom:

> Stvarna srednja vrednost merene veličine, $\bar{x}$, posle mnogih ponavljanja grupe od N merenja, našla bi se u intervalu $\langle x \rangle \pm \sigma/\sqrt{N}$ sa verovatnoćom od ~ 68%.

Pritom se standardna greška, $S_{\langle x \rangle} \simeq \sigma/\sqrt{N}$, daje sa jednom ili najviše dve značajne cifre, što i određuje značajne cifre rezultata.

- Osnovna osobina slučajne greške sr. v-sti je, dakle, da se ona smanjuje sa povećanjem broja merenja iskorišćenih za nalaženje sr. v-sti ali, nažalost, samo korenom brzinom. Ako želimo da na ovaj način smanjimo grešku n puta broj merenja moramo povećati n^2 puta; to očigledno ima smisla samo donekle! Efikasniji, ali principijelno teži način za smanjenje sluč. gr., je povećanje preciznosti merenja, tj. smanjenje σ.

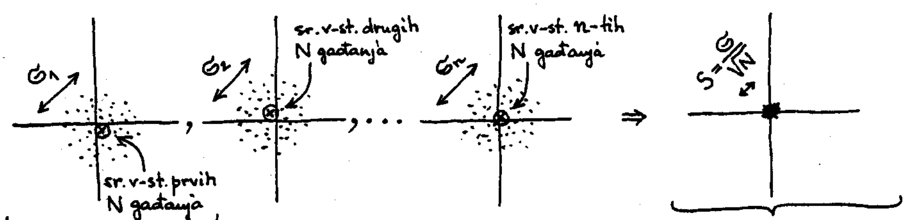
[NB: Kao što je sluč. gr. sr. v-sti jednaka širini raspodele sr. v-sti dobijenih iz mnogih istih skupova od N merenja tako je i sluč. gr. svakog pojedinačnog rezultata x_i jednaka širini raspodele tih pojedinačnih rezultata, σ. Dakle, slučajna greška sr. v-sti N merenja $\sqrt{N}$ puta je manja od sluč. gr. svakog pojedinačnog merenja.]

Ponovljeni eksperiment na fizičkom sistemu daje uvek (statistički) isti rezultat. Ponovljeni eksperiment na živom sistemu može da dâ i različit rezultat – živ sistem se adaptira i uči ⇒ Živi sistemi nisu ni stacionarni ni ergodični!

"Conditions worsened to a point where the progress-to-effort ratio became scarcely worthwhile", F. and G. Hoyle "The Incandescent Ones"

Zbog ovih osobina sluč. greške sr. v-sti sastavni deo rezultata obavezno čini i citat o broju merenja iskorišćenih za nalaženje sr. v-sti i njena sluč. gr. Tako se iz navedene sluč. greške može naći standardna devijacija distribucije pojedinačnih rezultata, σ, koja se inače ne citira nezavisno, a koja je jedina prava mera kvaliteta konkretnog eksperimenta.

- Iako je brzina smanjenja sluč. gr. sr. v-sti sa povećanjem broja merenja samo korena to ipak znači da će ona za ∞ broj merenja postati jednaka nuli, odnosno da ćemo tako distribuciju rezultata, a time i njene parametre, upoznati egzaktno. Zato se često kaže da, u principu, srednje vrednosti i nisu slučajne veličine. Ovo je jako značajno kada imamo posla sa vrlo velikim brojem realizacija identičnih situacija koje fluktuiraju i kada zbog ove osobine sr. v-sti ustvari imamo posla sa egzaktnim determinizmom (sve "makro" situacije). U slučaju malog broja realizacija, kao u svim merenjima (i u svim "mikro" situacijama), fluktuacije, odnosno u našoj terminologiji slučajne greške, dovode do ograničene tačnosti poznavanja v-sti fizičkih veličina (statistički determinizam).
- Analogija sa gađanjem u metu ilustruje osobine sistematskih i slučajnih grešaka. Neka je oružje fiksirano i neka ima rektificirane nišanske sprave (paralelne ose niš. sprava i cevi). Tada će pogoci biti rastureni oko centra mete (zanemarljiva sistematska greška) usled osobina oružja i municije i nestabilnosti meteo uslova (nezanemarljiva ali delimično reducibilna slučajna gr.). Ako izvršimo n-serija gađanja sa po N gađanja u svakoj seriji biće: (ovo treba ustvari gledati kao dve raspodele po x i y koordinati, ali nas to sada ne interesuje):



distribucija pogodaka iz N gađanja; σ_1 je mera rastura tih N pogodaka i zavisi od kvaliteta oružja + uslova

⇒ procena (predviđanje) širine raspodele srednjih vrednosti iz n-serija od N pogodaka dobija se već odavde kao
$S \simeq \sigma_1/\sqrt{N}$

sr.v-st svih sr.v-sti je sa v-ćom od 68% u intervalu $\pm S$ oko svake pojedinačne sr.v-sti, ili: 68% svih pojedinačnih sr.v-sti su u tom intervalu oko sr.v-sti svih sr.v-sti.

⇒ Rastur centara grupa od N pogodaka je za $\sqrt{N}$ puta manji od rastura samih pogodaka unutar grupe od N njih, i kako broj pogodaka u grupi raste rastur centara grupa je sve manji, da bi za $N \to \infty$ centar grupe pogodaka bio egzaktno definisan (iako je rastur unutar grupe nveliki), tj. centar sledeće grupe od ∞ pogodaka pašće na isto mesto (egzaktni determinizam). Takođe, sa ∞ metaka u grupi centar grupe je, nezavisno od kvaliteta oružja i uslova, uvek egzaktno definisan!

• PRIKAZIVANJE SREDNJE VREDNOSTI NA DATOM NIVOU POVERENJA

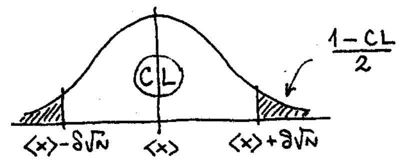
Unapred nam je jasno da je tzv. "standardna" definicija slučajne greške srednje vrednosti – standardna greška – kao intervala u kome se sa verovatnoćom od 68% nalazi stvarni rezultat, tj. stvarna srednja vrednost (širina od 1σ distribucije srednjih vrednosti), proizvoljna, i ova doza proizvoljnosti se nikako ne može izbeći.

Ako pretpostavimo da je distr. naših N rezultata normalna (što je bitna pretp.) onda je standardna greška S sr. v-sti $\langle x\rangle$ definisana kao:

$$\int_{\langle x\rangle - S\sqrt{N}}^{\langle x\rangle + S\sqrt{N}} f(x;\langle x\rangle,\sigma^2)\,dx = 0.68$$

U opštem slučaju, ako se ne vežemo za v-ću od 68% već proizvoljnu v-ću označimo sa CL (od "Confidence Level" ≡ nivo poverenja) ($0 \le CL \le 1$ ili $0\% \le CL \le 100\%$) a odgovarajući interval sa δ (interval poverenja ≡ CI od "Confidence Interval") biće:

$$CL = \int_{\langle x\rangle - \delta\sqrt{N}}^{\langle x\rangle + \delta\sqrt{N}} f(x;\langle x\rangle,\sigma^2)\,dx \quad \Rightarrow$$



Npr. za $CL = 68\%$ je $\delta\sqrt{N} = \sigma$ i $\delta \equiv S = \sigma/\sqrt{N}$ je standardna greška,

za $CL = 90\%$ je $\delta\sqrt{N} = 1.64\sigma$ i $\delta = 1.64\sigma/\sqrt{N}$,

za $CL = 99.73\%$ je $\delta\sqrt{N} = 3\sigma$ i $\delta = 3\sigma/\sqrt{N}$, itd.

Dakle, kako se to kaže: <u>rezultat može biti predstavljen na proizvoljnom nivou poverenja</u>, npr. ako se slučajna greška dâ kao $\delta = 1.64\,\sigma/\sqrt{N}$ kaže se da je rez. dat na nivou poverenja od 90%, itd. Ako se kaže da je dat sa standardnom greškom, $\delta \equiv S = \sigma/\sqrt{N}$, podrazumeva se da je nivo poverenja 68%.

- Dodatna komplikacija potiče otud što je za najčešći slučaj relativno malog broja merenja interval oko merene sr. v-sti u kome se sa određenom v-ćom (nivoom poverenja) nalazi stvarna srednja vrednost veći od ovog datog normalnom raspodelom. Ako, što je uobičajeno, taj interval, tj. slučajnu grešku, označimo kao tS (umesto δ) onda veličina t zavisi i od broja merenja N i od nivoa poverenja CL, pa ga pišemo kao $t_{N,CL}$, a distribuirana je po Studentovoj t-raspodeli. Za najčešće korišćene nivoe poverenja v-sti ove veličine su u Tabeli:

N \ CL	68% (1σ)	90%	99.73% (3σ)
2	1.8	6.31	235
3	1.32	2.92	19.2
4	1.20	2.35	9.2
6	1.11	2.02	5.5
8	1.09	1.89	4.5
10	1.06	1.83	4.1
20	1.03	1.73	3.4
30 ~gauss	1.02	1.70	3.3
∞ ~gauss	1.00	1.64	3.0

→ Razlike od normalne raspodele veće su za N malo i CL veliko (zbog jačih "repova" kod t-distr.) što tu jako povećava intervale pa je tu najbolje ne koristiti!

→ Ovo je dobra oblast, sa vrednostima malo različitim od normalnih. Za $N \ge 30$ to je za sve CL a za $CL = 68\%$ to je već za $N \simeq 10$.

⇒ Pri izboru nivoa poverenja na kome ćemo citirati rezultat bolje je biti 68% siguran da je rezultat između 4 i 5 nego 99.73% siguran da je između 0 i 10; ako je N malo, to je još gore (ekstrem je biti 100% siguran da je između $-\infty$ i $+\infty$, tj. da je "negde" – za to ne treba ni meriti). Mnogi optimalnom v-šću smatraju $CL = 90\%$.

"Ne možeš prepoznati avanturu po njenom početku – reče Merlin. Veličina se rađa mala!" John Steinbeck "Vitezovi kralja Artura"

Upitan o koristi od njegovih fundamentalnih radova iz elektromagnetizma Michel Faraday je odgovorio: "A kakva je korist od ljudske bebe?"

Posle svih ovih peripetija <u>recept</u> je konačno jednostavan:

Rezultat skupa od N merenja piše se u formi:

$$\boxed{\langle x\rangle \pm t_{N,CL}\,\sigma/\sqrt{N}}$$

uz napomenu: ① Iz koliko merenja N je dobijen i

② Na kom nivou poverenja CL je prikazan.

Srednja vrednost $\langle x\rangle$ i standardna devijacija σ računaju se po izrazima (*) na str. 43.

Tako napisan rezultat kaže da se prava srednja vrednost može očekivati u citiranom intervalu sa verovatnoćom jednakom bar CL, ali i da sa polovinom komplementarne verovatnoće, $(1-CL)/2$, može biti manja od donje granice ovog intervala, ili veća od njegove gornje granice.

~o~

PRIMERI, PROBLEMI, NAPOMENE:

① Prikažite rezultat sledećeg niza merenja na nivou poverenja a) 68%; b) 90%.

x = 5.615, 5.622, 5.624, 5.618, 5.620, 5.633, 5.628, 5.624, 5.613 m

⇒ Korišćenjem SD programa na kalkulatoru nalazimo direktno:

$$\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_1^9 x_i = 5.621\dot{8} \quad ; \quad \sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{8}\sum_1^9 (x_i - 5.621\dot{8})^2} = 0.006274$$

Vidimo da se u intervalu $\bar{x} \pm \sigma = [5.615, 5.628]$ nalazi ~7 od 9 rezultata a u $\bar{x} \pm 3\sigma = [5.603, 5.64]$ svih 9 rezultata, te da možemo prihvatiti normalnost rezultata. ⇒

a) $S = \sigma_{n-1}/\sqrt{9} = 2.09 \times 10^{-3}$ i uz $t_{9,68} \simeq 1.1 \Rightarrow t_{9,68} S = 2.3 \times 10^{-3}$ ⇒

"Rezultat serije od 9 merenja sa standardnom greškom je:

$x = 5.6219(23)$ m"

(Ostavili smo dve cifre u grešci jer bi zaokruživanje (a naročito majoriranje) mnogo promenilo nivo poverenja).

b) $t_{9,90} \cong 1.86 \Rightarrow t_{9,90} S = 3.9 \times 10^{-3} \simeq 4 \times 10^{-3}$ ⇒

"Rezultat serije od 9 merenja prikazan na nivou poverenja od 90% je:

$x = 5.622(4)$ m".

② U eksperimentu je dobijen rezultat koji je prezentiran kao: "$x = 3.14(4) \times 10^{-12}$, iz serije od 30 merenja, citiran na nivou poverenja od 90%." Nađite standardnu devijaciju te serije merenja i interval u kome su se pojavljivali rezultati.

$\Rightarrow t_{30,90} \cdot S = 1.64 \cdot \sigma/\sqrt{30} = 0.04 \times 10^{-12} \Rightarrow \sigma = 0.134 \times 10^{-12}$

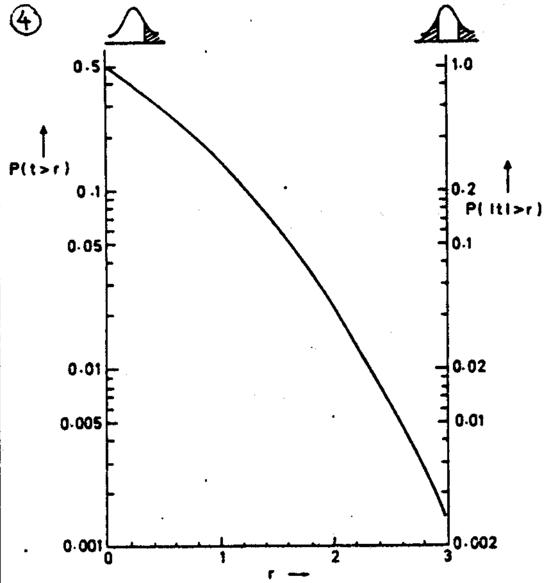
a praktično svi rezultati treba da su bili u intervalu $\bar{x} \pm 3\sigma$ tj.

$$(2.74 \lesssim x \lesssim 3.54) \times 10^{-12}.$$

③ Primer ispravnog citiranja rezultata koji ima i sistematsku i slučajnu grešku: "Srednji korigovani rezultat je 1.036 cm^2/g sa standardnom greškom od 0.002 cm^2/g iz 6 merenja. Ukupna sistematska greška procenjena je na 0.005 cm^2/g." (O dve škole citiranja sist. i sluč. gr. v. kasnije).

"Čekaju nas teška vremena i možda ćemo morati da smanjujemo troškove. No, i to će biti bolje nego dobiti sredstva pod lažnim izgovorima. Insistirajte i objašnjavajte, i borite se za razumevanje, tako da nauka koja nema drugog poticaja osim unutrašnje logike sopstvenog razvoja ne odumre". T. Gold, NYAcad 1975.

(4)



Umesto tabele integrala v-će za procene je zgodno koristiti grafik v-sti površine Gausijana (standardnog) za koje je $t = \frac{x - \langle x \rangle}{\sigma}$ veće od nekog r. Skala levo daje $P(t>r)$ a desno $P(|t|>r)$.

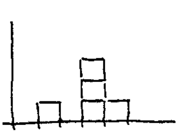
Ako je npr. eksperiment (exp) dao vrednost $a_{exp} = 143 \pm 3$ (sa standardnom greškom) a neka teorija (th) predviđa $a_{th} = 137$ pitanje je šta možemo reći o slaganju th i exp?

Tada možemo naći kolika je v-ća da bude $|t|>r$, ako t definišemo kao
$$t = \frac{a_{exp} - a_{th}}{s} = \frac{143-137}{3} = 2 .$$
Sa grafika nalazimo da je v-ća da se ova dva broja razlikuju za više od 2 st. dev. (bez obzira na znak) negde oko 4÷5%, tj. da će se u 4÷5 od 100 merenja identičnih našem dobiti bar ovolika razlika između ova dva broja, čak iako se oni, u srednjem, slažu. Obično se smatra da je ovo velika v-ća, tj. da ovakav rezultat ne odbacuje konkluzivno datu teoriju. No, usled toga što je σ (ili s) ovde određeno iz samo jednog skupa merenja, a naročito što tih merenja obično ima malo, te što stoga fluktuira, očekujemo da distribucija za t bude šira od normalne. To i daje Studentova t-raspodela koju i treba koristiti za mali broj merenja i visoke nivoe poverenja.

U slučaju da i teorijska v-st ima slučajnu grešku, recimo σ_{th}, varijabla t biće definisana kao
$$t = \frac{a_{exp} - a_{th}}{\sqrt{\sigma_{exp}^2 + \sigma_{th}^2}}$$
(ovo je inače primer tzv. "testiranja hipoteze").

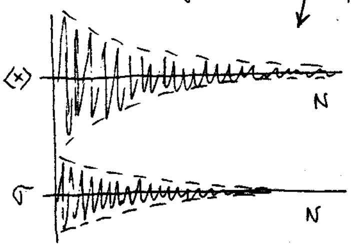
(5)

Primer, u kome ćemo se dotaći PROBLEMA ODBACIVANJA EKSPERIMENTALNIH REZULTATA: Neka je dobijen niz rezultata: 2,38, 2,36, 2,41, 2,16, 2,31. Histogram



izgleda prihvatljivo za ovako mali broj merenja. Ipak, pitanje koje se nameće je: Nije li rezultat 2.16 suviše različit od ostalih, tj. da li pripada istoj distribuciji kojoj i ostali (ili, opet prefrazirano, da li se pri dobijanju tog rezultata promenio neki od uslova više no u slučaju ostalih rezultata pa se njegovo odstupanje ne može objasniti samo statistikom ostalih rezultata već potiče od pripadnosti drugoj distribuciji). Pogledajmo numeriku i moguće zaključivanje: $\langle x \rangle = 2.324$ i $\sigma = 0.0986$ pa je odstupanje sumnjivog rezultata $\langle x \rangle - 2.16 = 0.164 \simeq 1.7\,\sigma$ što kaže da se ovoliko odstupanje može očekivati u oko 10% slučajeva, te se možda može prihvatiti i u našem slučaju. No, ako bismo ipak taj rezultat odbacili dobilo bi se $\langle x \rangle' = 2.365$ i $\sigma' = 0.042$ te bi takav "sumnjiv" rezultat odstupao za $\langle x \rangle' - 2.16 = 0.205 \simeq 4.9\,\sigma'$ što govori

da se takav rezultat praktično uopšte ne može očekivati! Šta zaključujemo?
Vidimo da su statistički zaključci u uslovima malog broja merenja (tzv. "loše statistike") krajnje **nestabilni** i da se sa svakim novim merenjem (ili promenom redosleda) mogu jako da menjaju. Ovo je sve posledica već objašnjene veličine greške srednje vrednosti ($\sim 1/\sqrt{N}$) i standardne devijacije ($\sim 1/\sqrt{2N}$) što možemo predstaviti i sledećim dijagramom, varijacija $\langle x \rangle$ i σ sa dodavanjem novih merenja. Dakle,



ako se nešto slično javi na malom broju merenja (manje od desetak) jedini ispravan recept je IZVRŠITI JOŠ DODATNIH MERENJA, "poboljšati statistiku" i dobiti stabilniji i značajniji statistički zaključak. Ako je tada naš sumnjiv rezultat još uvek sumnjiv, tj. ako dobijemo nešto slično kao →

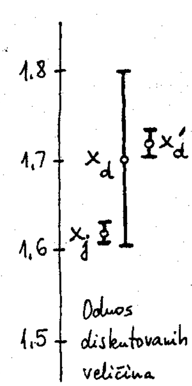
onda to znači da je on dobijen pod stvarno drugačijim uslovima no ostali rezultati te da možemo, a ustvari MORAMO (!) da ga odbacimo. Da bismo to mogli mirne duše da uradimo krajnje je poželjno ustanoviti pravi razlog tog anomalnog, "nestatističkog", odstupanja. Ekstremno je gledište da se nijedan rezultat nikad ne sme odbaciti samo na osnovu statističkih argumenata već da se UVEK MORA PRONAĆI STVARNI RAZLOG, a ako to nije moguće, da se mora odbaciti cela serija merenja (odnosno ponoviti pažljivije) na koju je statistička analiza ukazala da sa njom nešto nije u redu. (Ovo je u svakom slučaju znatno opravdanije gledište od drugog ekstrema koji dozvoljava odbacivanje statistički sumnjivih rezultata bez ikakve druge dodatne argumentacije (Chauvenet-ov kriterijum i slično).).

⑥ Primer, u kome će se videti šta se podrazumeva pod KONZISTENCIJOM SREDNJIH VREDNOSTI I STANDARDNIH DEVIJACIJA ILI GREŠAKA:

Neka je juče dobijen rezultat $x_j = 1.62 \pm 0.01$ iz 20 merenja na nivou poverenja od 99.7% a danas $\left\{ \begin{array}{l} x_d = 1.7 \pm 0.1 \text{ ili} \\ x'_d = 1.72 \pm 0.01 \end{array} \right\}$ na nivou poverenja od 99% iz 20 ili iz 3 merenja ⇒

⇒ Moguće kombinacije i odgovarajući zaključci su:

Rezultat	Broj merenja	Najverovatniji zaključak
x_j x'_d	20 20	Sve je u redu sa standardnim devijacijama, tj. sa slučajnim greškama ali se nešto sistematski desilo što je napravilo malo verovatnu razliku između sr. v-sti koje bi mogle da se razlikuju za ne više od ~ 3 standardne greške ("3σ kriterijum")



"Correct information does not cost – It pays!" – geslo CINDAS-a (Center for Information and Numerical Data Analysis and Synthesis)

x_j x_d	20 20	Ovolika razlika srednjih vrednosti je moguća (konzistentne su) jer slučajne greške (~3s) svojim preklapanjem govore da je to ~u redu, ali se od juče do danas nešto pokvarilo u preciznosti eksperimenta (σ_j i σ_d nisu konzistentne), recimo temp. stabilizacija, ili slično
x_j x'_d	20 3	Nešto se desilo sistematski jer su granice slučajnih grešaka predaleko pa je tolika razlika srednjih vrednosti neverovatna (nekonzistentne su), a nešto je i sa preciznošću bilo loše juče jer je standardna greška iz 20 merenja ista kao na danas iz samo 3 merenja (nekonzistentne su)
x_j x_d	20 3	Najverovatnije da je <u>sve u redu</u>. Srednje vrednosti se sudeći po slučajnim greškama (preklapanje u okviru 3σ) dozvoljeno razlikuju (konzistentne su) a verovatno je sve u redu i sa slučajnim greškama (konzistentne su) jer je ona od danas veća samo ~~zbog~~ manjeg broja merenja

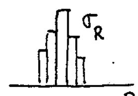
"Sve generalizacije su opasne, pa i ova!" A. Dumas - sin

⇒ Pitanje određivanja slaganja (konzistencije) srednjih vrednosti i slučajnih grešaka iz raznih skupova merenja vrlo je značajno jer omogućava detekciju anomalija u eksperimentu pa se treba kontinuirano pratiti. Za procene ovih konzistencija postoje egzaktni statistički testovi (t i F test) ali ih fizičari retko koriste. Umesto toga pri proceni konzistencije srednjih vrednosti koristi se plauzibilni <u>"3σ kriterijum"</u> (ili kriterijum preklapanja eksperimentalnih grešaka (u labavijoj formulaciji)) koji je ilustrovan gore a kaže da se razlika između srednjih vrednosti može tolerisati ako ne prelazi 3 standardne greške. Konzistencija slučajnih grešaka ceni se uglavnom grubo, na osnovu greške standardne devijacije za dati broj merenja. Sve ovo <u>jedina je mogućnost za kontrolu toka eksp-menta!</u>

(7) Primer, koji će vam ukazati na probleme pri određivanju <u>SLUČAJNE GREŠKE INDIREKTNO MERENE VELIČINE</u>: Sve što smo do sada govorili o slučajnim greškama odnosilo se na fluktuirajuće direktno merene veličine. Ako imamo niz takvih veličina sa svojim rezultujućim srednjim vrednostima i slučajnim greškama možemo ih iskoristiti za nalaženje vrednosti neke veličine koja je definisana ovim direktno merenim veličinama. Za nalaženje same te vrednosti koristimo srednje vrednosti dir. merenih v-čina a šta je sa njenom slučajnom greškom? ⇒

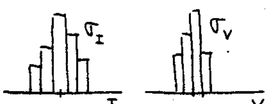
Pogledajmo konkretan primer: Neka, recimo, želimo da odredimo neki vrlo mali otpor mereći pad napona na njemu pri poznatoj (tj. takođe merenoj) struji kroz njega i neka i napon i struja pritom primetno fluktuiraju. Ako sa I_i i V_i označimo par. vrednosti dobijen u i-tom merenju ($i = 1, 2, \ldots, N$) očigledne su sledeće dve mogućnosti: (a) i (b):

merene vrednosti
$$\left\{\begin{array}{l} I_1,\ V_1 \longrightarrow R_1 \\ I_2,\ V_2 \longrightarrow R_2 \\ \vdots \\ I_N,\ V_N \longrightarrow R_N \end{array}\right\} \text{ (a) } \Rightarrow \langle R\rangle^a \pm S_R^a$$



(b)

$\langle I\rangle \pm S_I$ $\langle V\rangle \pm S_V$



(b) $\Rightarrow \langle R\rangle^b = \dfrac{\langle V\rangle}{\langle I\rangle}$

$S_R^b = ?$

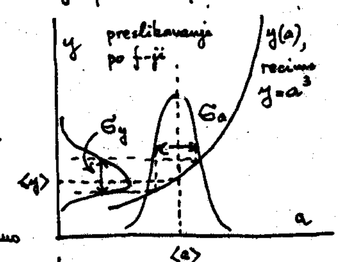
⇒ U načinu (a) procedura je jasna - jedino je problematično da li je obavezno da uzimamo baš par I_i, V_i za nalaženje $R_i = V_i/I_i$ ili ih umemo uzimati i u proizvoljnim kombinacijama. Odgovor je da je bolje uzimati ih u pripadajućim parovima.

⇒ U načinu (b) vrednost za R nalazi se iz srednjih v-sti za V i I a nedostaje nam procedura za nalaženje slučajne greške za R preko slučajnih grešaka za V i I, za koju kažemo da "propagira" iz ovih. O tome u sledećem poglavlju.

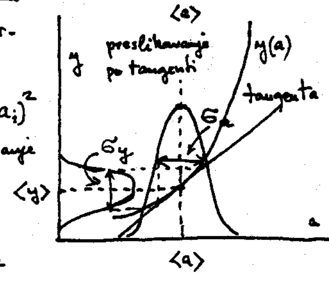
— Inače, procedure (a) i (b) treba da daju slične rezultate!

(26) SLUČAJNA GREŠKA INDIREKTNO MERENE VELIČINE

Pogledajmo prvo slučaj kada indirektno merena veličina y zavisi samo od jedne direktno merene veličine a, $y(a)$, pri čemu je a representovano svojom srednjom v-šću $\langle a\rangle$ i poseduje slučajnu grešku σ_a (odnosno S_a), tj. primetno fluktuira iz merenja u merenje. Pitanje je kako se ove fluktuacije odražavaju na fluktuacije veličine koja se odatle izračunava, odnosno kako sluč. gr. ind. mer. v-ne propagira iz sluč. gr. dir. mer. v-ne? Tada je dir. merena v-na a merena N puta sa rezultatima a_i $(i=1,2,\dots N)$ i datim $\langle a\rangle$ i σ_a, što po zavisnosti $y(a)$ proizvodi N v-sti za $y_i = y(a_i)$, odakle se mogu naći $\langle y\rangle = \frac{1}{N}\sum y_i = y(\langle a\rangle)$ i $\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum (y_i - \langle y\rangle)^2$. Time je problem egzaktno rešen.



Ovo je, kao i u slučaju sist. gr. ekvivalentno direktnom preslikavanju distr. gust. v-će veličine a po zavisnosti $y(a)$ u distr. gust. v-će veličine y. Ako je izvorna distr. bila recimo normalna ona preslikana, osim u slučaju linearne zavisnosti ne samo da neće biti normalna nego neće čak biti ni simetrična. No, kao ni za sist. gr., ovome se najčešće ne pribegava već se zadovoljavamo aproksimacijom date f-je tangentom u tački sr. v-sti dir. merene v-ne, što u preslikavanju održava tip izvorne raspodele.



Ako je skup a_i imao disperziju $\sigma_a^2 = \frac{1}{N}\sum (a_i - \langle a\rangle)^2 = \frac{1}{N}\sum (\Delta a_i)^2$ tada se i-to odstupanje a_i od $\langle a\rangle$, Δa_i, preslikava u odstupanje i-tog y_i od $\langle y\rangle = y(\langle a\rangle)$, Δy_i, kao $\Delta y_i = \frac{\partial y}{\partial a}\Delta a_i$ pa je sr. v-st kvadrata ovih odstupanja jednaka:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum (\Delta y_i)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 \frac{1}{N}\sum (\Delta a_i)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2$$

tj. $\sigma_y = \frac{\partial y}{\partial a}\sigma_a$, što je formalno isto kao u slučaju sist. gr., ali očigledno nije jednako σ_y^2 iz egzaktnog pristupa gore.

NB: Nauka je suma čovekovih aktivnosti usmerenih ka smanjenju grešaka u njegovom poimanju prirode.

Realan slučaj kada je indirektno merena v-na y f-ja većeg broja dir. mer. v-na (posmatraćemo samo slučaj dve dir. mer. v-ne a i b, $y = f(a, b)$) znatno je složeniji. Kao prvo, to znači da posedujemo N <u>parova</u> vrednosti dir. mer. v-na a_i, b_i koje su merene uvek u <u>istom stanju sistema</u>, ali pri čemu oba fluktuiraju, što proizvodi njihove distr. gust. v-će sa parametrima $\langle a \rangle, \sigma_a$ i $\langle b \rangle, \sigma_b$. Odatle možemo na dva načina (v. primer 7 gore) doći do v-sti za $y(a, b)$.

① Svaki par v-sti a_i, b_i daje jednu $y_i = y(a_i, b_i)$ pa odatle nalazimo $\langle y \rangle = \frac{1}{N}\sum y_i$ i $\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum(y_i - \langle y \rangle)^2 = \frac{1}{N}\sum(\Delta y_i)^2$ (što odgovara egzaktnoj propagaciji slučajne greške) i

② Nalazimo $\langle a \rangle = \frac{1}{N}\sum a_i$ i $\langle b \rangle = \frac{1}{N}\sum b_i$ a odatle $\langle y \rangle = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle)$ (što treba da je isto kao pod ①), ali je pitanje kako sada naći σ_y^2? Ako i tu pribegnemo linearnoj propagaciji devijacija (kao u slučaju zavisnosti od jedne promenljive, ili u slučaju propagacije sist. gr.) biće:
$$\Delta y_i \simeq \frac{\partial y}{\partial a}\Delta a_i + \frac{\partial y}{\partial b}\Delta b_i$$

pri čemu dozvoljavamo da znaci doprinosa fluktuacija a i b u fluktuaciju y ne moraju da budu isti, jer ovde, za razliku od sist. gr. stvarna odstupanja od srednjih vrednosti <u>znamo</u>. Tada je sr. v-st. kvadrata ovih odstupanja:
$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum(\Delta y_i)^2 = \frac{1}{N}\sum\left(\frac{\partial y}{\partial a}\Delta a_i + \frac{\partial y}{\partial b}\Delta b_i\right)^2,$$
što je samo aproksimacija gornjeg izraza za σ_y^2 iz načina ① ali što, kao što ćemo videti, pruža zanimljive mogućnosti za analizu složene situacije koja je pred nama. Kvadriranje zagrade daje:
$$\sigma_y^2 = \frac{1}{N}\sum\left\{\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2(\Delta a_i)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)(\Delta b_i)^2 + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\Delta a_i \Delta b_i\right\}$$
$$= \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 \underbrace{\frac{1}{N}\sum(\Delta a_i)^2}_{\sigma_a^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 \underbrace{\frac{1}{N}\sum(\Delta b_i)^2}_{\sigma_b^2} + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\underbrace{\frac{1}{N}\sum\Delta a_i \Delta b_i}_{\sigma_{ab}}$$

tj.
$$\boxed{\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2\sigma_a^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2\sigma_b^2 + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\sigma_{ab}}$$

gde smo uveli novu veličinu, σ_{ab}, koju nazivamo <u>kovarijansom</u> veličina a i b:
$$\sigma_{ab} = \frac{1}{N}\sum\Delta a_i \Delta b_i \equiv \langle \Delta a \Delta b \rangle = \frac{1}{N}\sum(\langle a \rangle - a_i)(\langle b \rangle - b_i) = \langle ab \rangle - \langle a \rangle\langle b \rangle.$$

Kovarijansa je dakle srednja vrednost proizvoda odstupanja veličina a i b od njihovih srednjih vrednosti. Ona je do sada nam nepoznata fiz. veličina koja kvantitativno opisuje karakter fluktuacija veličina a i b koje simultano opisuju stanje jednog fiz. sistema. Sledi da i fluktuacije ostalih veličina koje opisuju to isto stanje, recimo veličine y (tj. σ_y) takođe zavise ne samo od veličina fluktuacija v-na a i b nego i od međusobnog odnosa tih fluktuacija (fluktuacija je za nas sinonim za slučajnu grešku!).

Dakle, ako su odstupanja v-ne a od svoje sr. v-sti potpuno slučajna u odnosu na odstupanja v-ne b od svoje sr. v-sti tada će se proizvod tih odstupanja (uzetih uvek sa ispravnim

"Odustajem li od svog obeda samo zato što ne razumem u potpunosti proces varenja?" O. Heavyside - u prilog čisto eksperimentalne avanture znakom) posle merenja mnogo parova v-sti a, b, najverovatnije usredujiti u nulu. Tada je kovarijansa $\sigma_{ab} = \emptyset$ i kažemo da v-ne a i b nisu korelirane (da su nekorelirane). Tada nema trećeg, mešovitog člana u gornjem izrazu pa je:

$$\boxed{\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right) \sigma_b^2}$$

Kaže se da za nekorelirane veličine slučajne greške propagiraju u kvadraturama (za razliku od sist. gr. koje propagiraju linearno).

- Ako se, međutim, jedan smer fluktuacija v-ne a javlja češće u paru sa istim takvim smerom fluktuacije v-ne b u sumi σ_{ab} će preovladati pozitivni članovi i biće $\sigma_{ab} > 0$. Tada kažemo da su v-ne a i b korelirane, i to tim jače što je σ_{ab} veće.
- Ako, pak, jedan smer fluktuacija v-ne a za sobom u nekoj meri povlači suprotan smer fluktuacija v-ne b tada u sumi σ_{ab} dominiraju negativni članovi pa će biti $\sigma_{ab} < 0$. Tada kažemo da su a i b antikorelirani.

U teoriji grešaka definiše se tzv. matrica grešaka (ili varijaciono-kovarijaciona matica) (v. i formalizam najmanjih kvadrata, str. 71) koja je u slučaju dve varijable jednaka

$$D_{ab} = \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ab} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 \end{bmatrix}$$

tj. dijagonalni elementi su joj varijanse (ili disperzije) a van-dijagonalni kovarijanse, tj. sadrži sve elemente potrebne za račun grešaka v-na koje zavise od a i b, po gornjim izrazima.

Umesto kovarijanse σ_{ab} češće se koristi tzv. normirana kovarijansa ili korelacioni koeficijent, ρ_{ab}:

$$\rho_{ab} = \frac{\sigma_{ab}}{\sigma_a \sigma_b} \equiv \frac{\sigma_{ab}}{\sqrt{\sigma_a^2 \sigma_b^2}} .$$

Zbog važenja tzv. Švarcove nejednakosti $|\sigma_{ab}| \leq \sigma_a \sigma_b$ je $|\rho_{ab}| \leq 1$. Gornji izraz za propagaciju disperzija tako konačno postaje:

$$\boxed{\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\sigma_a \sigma_b \rho_{ab}} \qquad (*)$$

Za nekorelirane a i b je $\rho_{ab} = \emptyset$, za delimično korelirane je $\emptyset < \rho_{ab} < 1$, za korelirane je $\rho_{ab} = +1$, za delimično antikorelirane je $-1 < \rho_{ab} < \emptyset$ i za antikorelirane $\rho_{ab} = -1$.

- Korelacioni koef. se po radnom izrazu:

$$\rho_{ab} = \frac{N\sum ab - \sum a \sum b}{\sqrt{\left[N\sum a^2 - (\sum a)^2\right]\left[N\sum b^2 - (\sum b)^2\right]}}$$

danas može direktno izračunati na svakom "scientific calculator-u" koji ima ugrađen program za tzv. "linearnu regresiju" (koji se zove ili LR ili SD2), koja inače predstavlja i fit prave linije kroz unešene tačke (parove v-sti). Osim parametara prave linije, koji su nam za ovu potrebu irelevantni, ovaj program daje i vrednost korel. koef. ρ_{ab} ali i v-sti standardnih devijacija σ_a i σ_b (i to sa N i sa $N-1$) (i sr. v-sti $\langle a \rangle$ i $\langle b \rangle$), tj. celu matricu grešaka, odnosno sve veličine potrebne za račun σ_y. (Takođe v. i BASIC prog #7, koji za nulti pomak između dva niza unešenih brojeva daje ρ_{ab}).

"Kada kraljevi grade, tabadžije imaju da rade" F. Schiller

• Opšta (neugodna) osobina korelacionog koeficijenta je (kao uostalom i svih statističkih v-na!) je da ima malu statističku stabilnost, tj. da je za tačno određivanje ("procenu") ϱ potrebno mnogo merenja ($\sigma_\varrho = \sqrt{1-\varrho^2}/\sqrt{N}$, gde je N broj parova v-sti). U donjoj Tabeli su date v-sti verovatnoće $P_N(|\varrho| \geq |\varrho_0|)$ da rezultati N merenja dve inače nekorelirane veličine imaju koeficijent korelacije ne manji od ϱ_0, tj. da ϱ slučajno bude toliko. Ako je $P_N(|\varrho| \geq |\varrho_0|) > 5\%$ korelacija nije značajna, za $P_N \lesssim 5\%$ je značajna, a za $P_N \leq 1\%$ je visoko značajna.

N \ ϱ_0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
3	100	94	87	81	74	67	59	51	41	29	0
4	100	90	80	.	60	50	.	.	.	10	0
5	100	87	75	.	50	39	.	.	.	3.7	0
6	100	85	70	.	43	31	.	.	5.6	1.4	0
8	100	81	63	.	33	.	.	5.3	3.1	0.6	0
10	100	78	58	.	25	.	6.7	2.4	1.7	.	0
15	100	72	47	.	14	5.8	1.8	0.4	.	.	0
20	100	67	.	.	8	2.5	0.51	.	.	.	0
30	100	60	.	.	2.9	0.81	.	.	.	.	0
40	100	54	22	6	1.1	0.1	.	.	.	.	0
50	100	-	-	3	[illegible]	-	.	.	.	.	0

ZNAČAJNO

VISOKO ZNAČAJNO

ali, **OPREZ**! Postoje slučajevi i značajno koreliranih veličina kada to ne ukazuje čak ni na postojanje zajedničkog uzroka. Npr. sve veličine koje iz svojih "ličnih", potpuno nezavisnih razloga, datim tempom rastu sa vremenom izgledale bi međusobno korelirane. To se ponekad zove "nonsense correlation".

Vidi se da je malim brojem merenja nemoguće značajno utvrditi korelaciju dveju veličina, osim ako nisu baš vrlo jako korelirane.

• Pošto je $|\varrho_{ab}| \leq 1$ to je $\sigma_y^2 \leq \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + 2\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}\sigma_a\sigma_b$ tj.

$$\sigma_y^2 \leq \left\{\left|\frac{\partial y}{\partial a}\right|\sigma_a + \left|\frac{\partial y}{\partial b}\right|\sigma_b\right\}^2 \quad \text{odnosno:} \quad \boxed{\sigma_y \leq \left|\frac{\partial y}{\partial a}\right|\sigma_a + \left|\frac{\partial y}{\partial b}\right|\sigma_b}$$

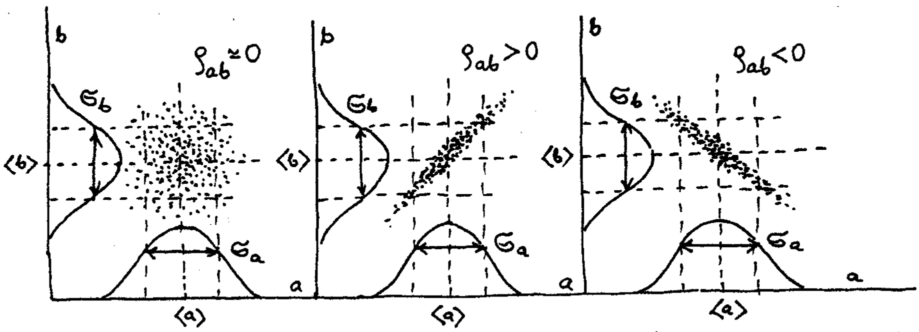
što je maksimalna moguća slučajna greška.

Dakle, ako slučajne greške propagiramo linearno, tj. formulom isto kao sist. greške, tada dobijamo njihove maksimalno moguće (precenjene!) vrednosti, koje odgovaraju slučaju najnepovoljnije korelacije. Ta se osobina može koristiti za potrebe procena.

• Ako v-na y zavisi od više direktno mer. v-na stvar se komplikuje utoliko što se svi parovi v-sti moraju tretirati na isti način (npr. za $y = f(a,b,c)$ treba naći $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \varrho_{ab}, \varrho_{ac}, \varrho_{bc}$). Sve što je rečeno za stand. dev. σ važi i za standardne greške S, kao i za slučajne greške na ma kom nivou poverenja.

• Karakter korelacije među v-nama a i b se vizualizuje crtanjem polja rezultata ovih veličina, tj. prikazivanjem parova vrednosti a_i, b_i u koordinatnom sistemu a, b:

"Ni u šta ne verujemo tako duboko kao u ono o čemu najmanje znamo" Michel de Montaigne (1533-1592)



Dakle, iako su u sva tri slučaja distribucije za a i b, a time i njihovi parametri $\langle a \rangle$, $\langle b \rangle$, σ_a, σ_b, potpuno isti (što daje i isto $y = f(\langle a \rangle, \langle b \rangle)$), polje rezultata (a, b) može da izgleda sasvim različito – što se i opisuje različitim v-stima kovarijanse σ_{ab} ili korel. koef. ϱ_{ab}, i što za svaki od ovih slučajeva daje drugačiju sluč. gr. za y, σ_y (odnosno dovodi do drugačijeg fluktuiranja y-a).

Primer proizvoda: Neka je $y = a \cdot b \Rightarrow$ $\frac{\partial y}{\partial a} = b$ i $\frac{\partial y}{\partial b} = a \Rightarrow$

$$s_y^2 = b^2 s_a^2 + a^2 s_b^2 + 2ab\, s_a s_b \varrho_{ab} \quad \text{tj.}$$

$$\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = \left(\frac{s_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{s_b}{b}\right)^2 + 2\,\frac{s_a}{a}\,\frac{s_b}{b}\,\varrho_{ab} .$$

Ako je, npr. $\frac{s_a}{a} = \frac{s_b}{b}$ (iste slučajne relativne greške) biće:

za $\varrho_{ab} = +1$: $\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = 4\left(\frac{s_a}{a}\right)^2$

za $\varrho_{ab} = 0$: $\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = 2\left(\frac{s_a}{a}\right)^2$

za $\varrho_{ab} = -1$: $\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = \emptyset\,!$

a za delimično korelirane v-sti moguće su sve međuvrednosti

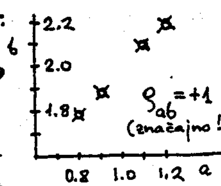
(koga ovo podseća na interferenciju talasa neka pogleda Dodatak #5).

Konkretizujmo ovo na numeričkom primeru. Posmatraćemo uvek isti skup v-sti za veličine a i b, ali svaki put samo u promenjenom redosledu (u različitim parovima v-sti). Vrednost za y i njenu slučajnu grešku naći ćemo na oba gore opisana načina: Pošto su v-sti za a i b uvek iste iste će biti i $\langle a \rangle, \sigma_a, \langle b \rangle, \sigma_b$ a razlikovaće se samo σ_{ab} a time i σ_y:

i)

a	0.8	0.9	1.1	1.2
b	1.8	1.9	2.1	2.2

$\Rightarrow$



$\Rightarrow \langle a \rangle = 1.0 \quad \sigma_{a,n-1} = 0.18257$

$\langle b \rangle = 2.0 \quad \sigma_{b,n-1} = 0.18257$

1. Način:

$\langle y \rangle = \frac{1}{4}\sum_1^4 y_i = \frac{1}{4}\sum a_i b_i = 2.025$

$\sigma_y^2 = \frac{1}{3}\sum_1^4 \left[a_i b_i - \langle y \rangle\right]^2 = 0.3011$

$\Rightarrow \sigma_y = 0.5487$

2. Način:

$\langle y \rangle = \langle a \rangle \langle b \rangle = 2.0$

($\sigma_a = \sigma_b$, namerno!)

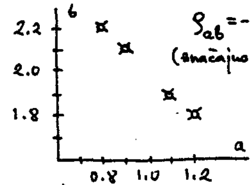
$\sigma_y^2 = 4 \cdot \sigma_a^2 + \sigma_b^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sigma_a \sigma_b = 9\,\sigma_a^2 = 0.3$

$\Rightarrow \sigma_y = 0.5477$, $s_y = t_{4,68} \cdot \sigma_y = 1.2\,\sigma_y \rightarrow$

• Rezultati iz oba načina su praktično isti, ali 2. način dozvoljava i korelacionu analizu!

"Ahil nikad ne bi pobedio kornjaču da je mislio na prostor i vreme" Paul Valery ii)

a	0.8	0.9	1.1	1.2
b	2.2	2.1	1.9	1.8



$\varrho_{ab} = -1$ (značajno!)

1. Način

$\langle y \rangle = \frac{1}{4}\sum_{1}^{4} a_i b_i = 1.975$

$\sigma_y^2 = \frac{1}{3}\sum\left[a_i b_i - \langle y \rangle\right]^2 = 0.03446$

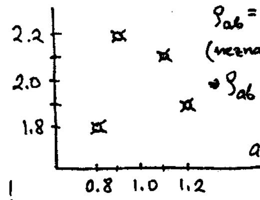
2. Način:

$\sigma_y^2 = 4\sigma_a^2 + \sigma_a^2 - 4\sigma_a^2 = \sigma_a^2$

$= 0.0\dot{3}$ (uporedite sa σ_y^2 iz i)!)

iii)

a	0.8	0.9	1.1	1.2
b	1.8	2.2	2.1	1.9



$\varrho_{ab} = +0.1$ (neznačajno!) $\Rightarrow \varrho_{ab} \simeq \emptyset$!

1. Način:

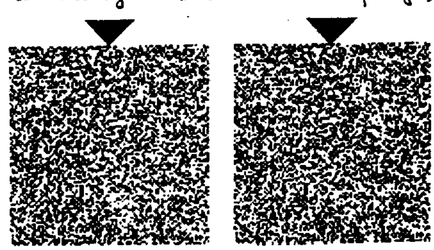
$\langle y \rangle = \frac{1}{4}\sum a_i b_i = 2.0025$

$\sigma_y^2 = \frac{1}{3}\sum\left[a_i b_i - \langle y \rangle\right]^2 = 0.1628$

2. Način:

$\sigma_y^2 = 4\sigma_a^2 + \sigma_a^2 = 5\sigma_a^2 = 0.1\dot{6}$!

- Autentičnost korelacije kao karakteristike slučajnih procesa lepo ilustruje primer stereograma slučajnih tačaka (B. Julesz). Svaki kvadrat sadrži polje samih slučajnih tačaka i svako polje ponaosob ne nosi nikakvu informaciju. Korelacija između njih, međutim nije nula i ona čini vidljivom (ovde u pravom smislu te reči (!) a inače samo matematičkom analizom) prisutnu pojavu. Da bi se ovo uočilo držite sliku na daljini (vašeg) jasnog vida (oko 25 cm) pod dobrim osvetljenjem tako da osnove kvadrata budu paralelne liniji vaših očiju. Trudite se da gledate razroko; svako oko svoju sliku. Kada to budete uspeli trouglovi iznad slika treba da se spoje u jedan, kao i veliki kvadrati. Tada bi iz ravni kvadrata trebalo da vam iskoči manji kvadrat, koga inače u pojedinačnim kvadratima ne možemo nikako da uočimo. (Pored centralne slike, sa obe strane, javljaju se isti takvi kvadrati ali na njih ne treba obraćati pažnju).



Ima li boljeg dokaza da moramo znati šta i kako da posmatramo u prirodi da bismo otkrili i shvatili tamo postojeći red i zakonomernosti !?

- Sada kada smo videli kako propagiraju slučajne greške indirektno merenih veličina lako možemo naći i slučajnu (standardnu) grešku srednje vrednosti. Budući da je sr. v-st jednaka $\langle x \rangle = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots + x_N)$ tj. da se izračunava iz direktno merenih v-na $x_1, x_2, \dots x_N$ to i nju možemo smatrati indirektno merenom veličinom. Kako pojedinačni rezultati x_i svi pripadaju istoj distribuciji čija je širina σ to svi imaju istu slučajnu grešku: $S_{x_i} = \sigma$. Svi su oni sigurno nekorelirani pa su im i sve uzajamne kvarijanse nula. Sluč. gr. sr. v-sti zato možemo naći kao:

$$S_{\langle x \rangle}^2 = \sum_{1}^{N}\left(\frac{\partial\langle x \rangle}{\partial x_i}\right)^2 S_{x_i}^2 \,, \text{ uz } \frac{\partial\langle x \rangle}{\partial x_i} = \frac{1}{N}\frac{\partial}{\partial x_i}(x_1 + \dots + x_N) = \frac{1}{N} \Rightarrow S_{\langle x \rangle}^2 = \frac{1}{N^2}\sum_{1}^{N}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

QEI.

Stara kineska poslovica kaže: "Ne slušaj stare kineske poslovice"

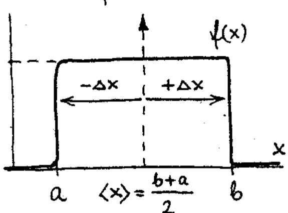
"Da bi video nešto novo moraš da napraviš nešto novo" g.C. Lichtenberg

• Sada takođe možemo da razmotrimo i statistički način tretiranja simetrične sistematske greške, što onda omogućuje i njeno kombinovanje sa slučajnom greškom, kada su obe prisutne. (Za upoređenje ove "škole kombinovanja sist. i sluč. gr" sa "školom njihovog odvojenog prikazivanja" pogledati LIT #16 vs LIT #17).

Govorimo o simetričnoj sistematskoj grešci koja je posledica ili konačne tačnosti kalibracije, konačne moći razlaganja ili prosto najmanjeg podeoka - kada se promena merene veličine unutar tim veličinama definisanog intervala ne odražava na promenu rezultata ili, drugim rečima, kada postoji podjednaka verovatnoća da se stvarna vrednost merene veličine nalazi ma gde unutar tog intervala (što je ekvivalentno jednosmernoj grešci koja je preživela randomizaciju). Ako je taj interval jednak $b-a$ tada je distribucija gustine verovatnoće nalaženja stvarnog rezultata unutar tog intervala, tzv. ravnomerna raspodela oblika $f'(x)\,dx = C\,dx$ sa konstantom normiranja

$$N = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{C(b-a)} \quad \text{pa je}$$

$$C = \frac{1}{b-a}$$



$$\boxed{f(x)\,dx = \frac{dx}{b-a}}$$ normirana ravnomerna raspodela

Srednja v-st distr. je: $\langle x\rangle = \int_a^b x f(x)\,dx = \dfrac{b+a}{2}$

a disperzija (srednje kvadratno odstupanje od sr. v-sti):

$$\sigma^2 = \int_a^b (x-\langle x\rangle)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\left\{ \frac{x^3}{3}\Big|_a^b - (b+a)\frac{x^2}{2}\Big|_a^b + \frac{(b+a)^2}{4}x\Big|_a^b \right\} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Ako sada dato čitanje (koje se ne ponavlja!) interpretiramo kao srednju vrednost (najverovatniju) ovakve raspodele, $\langle x\rangle$, i ako polovinu intervala $b-a$ izjednačimo sa procenjenom simetričnom sistematskom greškom Δx, tj. uzmemo da je $\Delta x = (b-a)/2$, tada ovom rezultatu $\langle x\rangle$ možemo pridružiti slučajnu grešku jednaku standardnoj devijaciji ovakve raspodele $\boxed{\sigma = \dfrac{b-a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\Delta x}{\sqrt{3}}}$ što povezuje "sistematsku" (Δx) i "slučajnu" (σ) interpretaciju gornjih vidova grešaka.

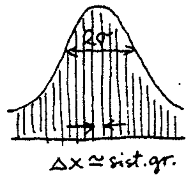
Imamo, dakle, dve mogućnosti:

1. Jedanput merenu vrednost pišemo u formi $x \pm \Delta x$ i veličinu Δx shvatamo kao sistematsku grešku. Tada odvojeno i tretiramo i prezentiramo sistematske od slučajnih grešaka (prve propagiramo linearno, druge u kvadraturama, itd).
2. Jedanput merenu vrednost pišemo u formi $\langle x\rangle \pm \sigma$ (sa $\sigma = \Delta x/\sqrt{3}$) shvatajući samu vrednost kao srednju vrednost ravnomerne distribucije čija je standardna devijacija σ. Tada i slučajne i sistematske greške (samo simetrične!) tretiramo kao slučajne (budući da su nezavisne propagiramo ih u kvadraturama i sl.) i prikazujemo ih kao jednu jedinstvenu u kvadraturama sabranu slučajnu grešku, recimo $S_{tot} = \sqrt{S_{\langle x\rangle}^2 + \sigma^2}$ (pa na željenom nivou poverenja.

- Mi smo se ovde opredelili za prvu interpretaciju, imajući u vidu bitnu razliku u poreklu ova dva tipa grešaka.

• Na osnovu ovog razmatranja možemo i bolje da obrazložimo zašto postojanje slučajne greške često znači da sistematsku možemo zanemariti (i obratno) pa time i u potpunosti izbeći gornju dilemu.

Ako je tačnost (sistematska greška) takva da se u pojedinačnim direktnim merenjima od merenja do merenja menjaju-variraju-poslednja sigurna cifra i bar povremeno i druga-pretposlednja-sigurna cifra tako da je $\Delta x \lesssim \sigma/5$



(što je približno min., ili dovoljno, da se dobro ocrta sama raspodela)

i ako je $n \simeq 10 \Rightarrow$

$$S = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \simeq \frac{\sigma}{3} \quad \text{ili:}$$

$$\boxed{\Delta x \lesssim \frac{3}{5} S}$$

pa je ukupna greška $\Delta \simeq \sqrt{\frac{\Delta^2 x}{3} + S^2}$ tj.

iz $\Delta^2 x \lesssim \frac{9}{25} S^2 \Rightarrow \frac{\Delta^2 x}{3} \simeq \frac{3}{25} S^2 \simeq \frac{S^2}{10}$ tj. $\Delta \simeq S$, Q.E.D.

(27) SREDNJA VREDNOST SREDNJIH VREDNOSTI - INTERNA I EKSTERNA GREŠKA

Potreba za otežinjenom srednjom vrednošću: Razmotrimo sledeću maltene svakodnevnu situaciju: Neka je izvršeno ukupno 10 merenja v-ne x; 7 pre podne (ili u LAB 1) i 3 popodne (ili u LAB 2) sa resultujućim sr. v-stima $\langle x\rangle_1$ i $\langle x\rangle_2$:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	9	7	8	8	9	7	6	9	6	8

$$\langle x\rangle_1 = \frac{1}{7}\sum_1^7 x_i = 7.714\,; \quad \langle x\rangle_2 = \frac{1}{3}\sum_8^{10} x_i = 7.\dot{6}$$

Po inerciji, ne razmišljajući dovoljno, skloni smo da, znajući ove dve sr. v-sti, jedinstvenu reprezentativnu sr. v-st celog niza merenja nađemo kao njihovu običnu aritmetičku sr. v-st:

$$\langle x\rangle' = \frac{\langle x\rangle_1 + \langle x\rangle_2}{2} = 7.69$$

Lako se, međutim, nalaženjem sr. v-sti celog niza (za koju smo sigurni da je ispravna)

$$\langle x\rangle'' = \frac{1}{10}\sum_1^{10} x_i = 7.7$$

uveravamo da je to pogrešno a da je ispravna sr. v-st ove dve sr. v-sti njihova otežinjena sr. v-st:

$$\langle x\rangle = \frac{7\langle x\rangle_1 + 3\langle x\rangle_2}{7+3} = \frac{7\cdot\frac{1}{7}\sum_1^7 x_i + 3\,\frac{1}{3}\sum_8^{10} x_i}{10} = \frac{1}{10}\sum_1^{10} x_i \equiv \langle x\rangle''$$

pri čemu su težine parcijalnih sr. v-sti jednake broju merenja iskorišćenom za dobijanje date sr. v-sti. Obična (aritm.) sr. v-st sr. v-sti jednostavno je pogrešna, tj. nije mišta!

Identičan problem javlja se svaki put kada želimo da dati niz rezultata usrednjimo na dva moguća načina - ucelo ili u delovima (što se opet može uraditi na mnogo načina) - i da pritom, jasno, uvek dobijemo isti rezultat nezavisno od načina obrade, ali i uvek kada želimo da usrednjimo rezultate različitih eksperimenata za istu stvar i pritom dobijemo jedinstven rez. koji će otada predstavljati ceo taj skup.

"Everything that has already happened is particles, everything in the future is waves" Sir Lawrence Bragg

U svim tim situacijama je, dakle, ispravna sr. v-st n parcijalnih sr. v-sti $\langle x \rangle_i = \frac{1}{N_i}\sum_1^{N_i} x_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jednaka njihovoj otežinjenoj sr. v-sti:

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n w_i \langle x \rangle_i}{\sum_1^n w_i} = \frac{\sum_1^n N_i \langle x \rangle_i}{\sum_1^n N_i}$$

ali da bismo mogli da je nađemo moramo znati broj merenja upotrebljenih za nalaženje svake sr. v-sti, $w_i = N_i$. Kada su naša sopstvena merenja u pitanju to nije problem ali kada se radi o usrednjavanju tuđih merenja to često ne znamo (iako se, kao što smo učili – a sada se vidi zašto! – kodeksom preporučuje da se pored slučajne greške citira i broj merenja). Tada nam jedino ostaje da pretpostavimo da su sve parcijalne sr. v-sti $\langle x \rangle_i$ koje želimo da usrednjimo "izvučene iz iste populacije", tj. da svi izvorni rezultati pripadaju istoj distr. gust. v-će i da imaju isto σ a da parcijalne sr. v-sti $\langle x \rangle_i$ imaju slučajne greške $S_{\langle x \rangle_i}$ koje se međusobno razlikuju samo zbog različitog broja merenja N_i iz kojih su nađene, tj. da važi relacija:

$$S_{\langle x \rangle_i} = \frac{\sigma}{\sqrt{N_i}} \quad \text{odnosno} \quad N_i = \frac{\sigma^2}{S^2_{\langle x \rangle_i}} \quad \text{a time i da je:}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^n N_i \langle x \rangle_i}{\sum_1^n N_i} = \frac{\sum_1^n \frac{\cancel{\sigma^2}}{S^2_{\langle x \rangle_i}} \langle x \rangle_i}{\sum_1^n \frac{\cancel{\sigma^2}}{S^2_{\langle x \rangle_i}}} = \frac{\sum_1^n \frac{\langle x \rangle_i}{S^2_{\langle x \rangle_i}}}{\sum_1^n \frac{1}{S^2_{\langle x \rangle_i}}} = \frac{\sum_1^n w_i \langle x \rangle_i}{\sum_1^n w_i} \, . \quad (*)$$

Dakle, uz pretpostavku da je u svim eksperimentima za dobijanje $\langle x \rangle_i$ isto σ, pri usrednjavanju tih rezultata kao težine možemo uzimati recipročne v-sti kvadrata njihovih slučajnih grešaka:

$$w_i = \frac{1}{S^2_{\langle x \rangle_i}} \, .$$

(težine su neodređene do na konstantni množitelj). Slučajnu grešku ovakve sr. v-sti nalazimo propagacijom sluč. grešaka parcijalnih sr. v-sti kao nekorelisanih v-na:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\sum_1^n \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \langle x \rangle_i}\right)^2 S^2_{\langle x \rangle_i}} \quad \text{što uz} \quad \frac{\partial \bar{x}}{\partial \langle x \rangle_i} = \frac{\partial}{\partial \langle x \rangle_i} \frac{\sum w_i \langle x \rangle_i}{\sum w_i} = \frac{w_i}{\sum w_i} \quad \text{i}$$

$$S^2_{\langle x \rangle_i} = \frac{1}{w_i} \quad \text{i} \quad \sum w_i = \text{const}.$$

daje:

$$S_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^n w_i}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^n \frac{1}{S^2_{\langle x \rangle_i}}}} \, . \qquad (**)$$

Ovo se zove interna (ili a priori) greška sr. v-sti sr. v-sti i ona bi morala da ispravno dâ interval u kome se sa odgovarajućim nivoom poverenja CL (koji je ovde implicitno 68%, ali to ne mora da bude) nalazi stvarna sr. v-st svih usrednjenih sr. v-sti. Ona daje predviđanje za širinu raspodele sr. v-sti oko sr. v-sti sr. v-sti i to bi tako trebalo i da

"The advancing sieve of time coagulates waves into particles at the moment now" Sir Lawrence Bragg bude pod uslovom da su sve pretpostavke učinjene u dobijanju izraza za grešku ispunjene, na prvom mestu da su svi parcijalni rez. iz iste populacije (isto σ).

NB: Odavde opet lako nalazimo izraz za standardnu grešku obične sr. v-sti. Ako:

$$\langle x\rangle_i \to x_i \quad (i=1,2,\dots N) \; ; \quad S_{\langle x\rangle_i} \to \sigma \quad i \quad S_{\bar{x}} \to S_{\langle x\rangle}$$

tada je:

$$\langle x\rangle = \frac{\sum_1^N w_i \langle x\rangle_i}{\sum_1^N w_i} = \frac{\frac{1}{\sigma^2}\sum^N x_i}{\frac{1}{\sigma^2}\sum_1^N 1} = \frac{1}{N}\sum_1^N x_i \quad i$$

$$S_{\bar{x}} = S_{\langle x\rangle} = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^N \frac{1}{\sigma^2}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \qquad \text{Q.E.I.}$$

Iz gornjih izraza vide se bitne osobine ovakvog usrednjavanja sr. v-sti:

① Srednja v-st srednjih v-sti privučena je najtežoj (najtačnijoj) sr. v-sti, (*)

② Interna greška sr. v-sti sr. v-sti manja je od najmanje greške parcijalnih sr. v-sti (**), tj. sr. v-st sr. v-sti ima veću tačnost od ma koje pojedinačne sr. v-sti (kao da smo sve rezultate obradili odjedanput – ucelo, što je inače moguće samo ako znamo sve pojedinačne rezultate). To je i razlog zašto se jedne te iste stvari mere opet i opet i objašnjava stalno povećanje tačnosti svih rezultata u fizici.

Sledeća šema pojašnjava identičnost obrade rezultata "ucelo" ili "u delovima":

ucelo:

$$\overbrace{x_1, x_2, \dots, x_i}^{N}, x_{i+1}, \dots, x_N \quad \Big\} \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_1^N x_i \, , \quad S_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

$$\underbrace{x_1, x_2,}_{N_1} \; \underbrace{\dots, x_i,}_{N_2} \; \dots \; \underbrace{\dots, x_N}_{N_m}$$

u delovima:

$$\underbrace{\langle x\rangle_1 \pm S_{\langle x\rangle_1} \quad \langle x\rangle_2 \pm S_{\langle x\rangle_2} \quad \dots \quad \langle x\rangle_n \pm S_{\langle x\rangle_n}}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_1^m N_i \langle x\rangle_i}{\sum_1^m N_i} \quad \text{sa} \quad \langle x\rangle_i = \frac{1}{N_i}\sum_1^{N_i} x_j \quad i \quad S_{\langle x\rangle_i} = \frac{\sigma}{\sqrt{N_i}}$$

$$i \quad S_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^m \frac{1}{S^2_{\langle x\rangle_i}}}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^m \frac{N_i}{\sigma^2}}} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum_1^m N_i}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$$

Međutim, ako svi parcijalni rezultati ne pripadaju zaista istoj populaciji nego neki od njih imaju <u>veće σ</u> od ostalih, ili ako rastur <u>ne potiče samo od statistike</u> već postoje i sistematske razlike među parc. rez., onda će <u>stvarni rastur parcijalnih sr. v-sti</u> biti <u>veći</u> od onog koga <u>predviđa interna greška</u>. Da bi se utvrdilo stvarno stanje stvari po ovom pitanju izračunava se stvarni rastur sr. v-sti oko sr. v-sti sr. v-sti, koga nazivamo <u>eksternom</u> (ili <u>a posteriori</u>) <u>greškom</u> sr. v-sti sr. v-sti i upoređuje sa

"Vreme je taj veliki poklon prirode zahvaljujući kome se sve ne događa odjedanput" C. J. Overbeck onim koga predviđa interna greška. Ako smo ovim upoređenjem zadovoljni onda je sve u redu i usrednjavanje je zadovoljavajuće. Ako nas međutim ovo upoređenje ne zadovolji parcijalne sr. v-sti smatramo međusobno <u>nekonzistentnim</u> i usrednjavanje, u principu, ne može ni da se izvrši (istom takvom procedurom uvek možemo proveriti i konzistentnost sopstvenih podataka). Da bi se taj program sproveo prvo treba naći i eksternu grešku, tj. stvarnu širinu distribucije parcijalnih sr. v-sti koje želimo da usrednjimo. Ona je po definiciji:

$$S_{ext} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum_1^n w_i (\bar{x} - \langle x \rangle_i)^2}{\cancel{n} \sum_1^n w_i} \cdot \frac{\cancel{n}}{n-1}} \qquad (***)$$

Yates-ova korekcija (što se vidi za $w_i = 1$)

Stvarni i predviđeni (ili aposteriorni i apriorni) rastur upoređuju se posmatranjem odnosa kvadrata eksterne i interne (ovde je označimo kao $S_{int} \equiv S_{\bar{x}}$) greške, koji se označava kao χ^2 ("hi-kvadrat", engl = "chi-square" - ("kaj")):

$$\chi^2 = \frac{S_{ext}^2}{S_{int}^2} = \frac{\dfrac{\sum w_i (\bar{x} - \langle x \rangle_i)^2}{(n-1) \cancel{\sum w_i}}}{\dfrac{1}{\cancel{\sum w_i}}} = \frac{1}{n-1} \sum_1^n w_i (\bar{x} - \langle x \rangle_i)^2 \qquad \text{tj:}$$

$$\boxed{\chi^2 = \frac{1}{n-1} \sum_1^n \frac{(\bar{x} - \langle x \rangle_i)^2}{S^2_{\langle x \rangle_i}}}$$

Vidimo da jednakost eksterne i interne greške, tj. $\chi^2 = 1$, znači da je:

$$\sum_1^n \frac{(\bar{x} - \langle x \rangle_i)^2}{S^2_{\langle x \rangle_i}} \equiv \sum_1^n \underbrace{\left[\frac{\Delta_i}{S_{\langle x \rangle_i}}\right]^2}_{\simeq 1} = n$$

što će biti ispunjeno kada je $(\bar{x} - \langle x \rangle_i) \equiv \Delta_i = S_{\langle x \rangle_i}$, odnosno kada parcijalne sr. v-sti $\langle x \rangle_i$ odstupaju od sr. v-sti sr. v-sti $\bar{x}$ <u>u proseku</u> za iznos svoje sluč. gr. $S_{\langle x \rangle_i}$. Egzaktno razmatranje, jasno, mora da vodi računa o stvarnom statističkom karakteru svih ovih veličina što znači da će naša logika važiti <u>samo u srednjem</u> a da će se sa određenom v-ćom javljati odstupanja od nje. Pokazuje se da je odnos kvadrata eksterne i interne greška distribuiran po χ^2 raspodeli (otud mu i oznaka) te da postoji određena v-ća da taj odnos bude proizvoljno veliki (ili veći) čak i kada je sve u redu, odnosno kada su eksterna i interna greška ustvari jednake, a u konkretnoj realizaciji im odnos fluktuaciono "otpliva".
Da se dobije veliki χ^2 je malo verovatno pa se po konvenciji smatra da χ^2 za koga je v-ća da se dobije manja od ~1% sugerira da u podacima postoje efekti koje interna greška ne obuhvata, te da se, de facto, rezultati ni ne mogu usrednjiti.

NB: Ne događa se nešto zato što vreme protiče, nego vreme protiče zato što se nešto događa!

U Tabeli su date verovatnoće p (u %) da se data vrednost $\chi^2 \cdot (n-1)$, ili veća, dobije ako je sa podacima sve u redu: [$n-1$ = "broj stepeni slobode" a $\chi^2 \cdot (n-1)$ = "nenormirani χ^2"]

$n \backslash p$	99	95	50	10	5	1	0.1
3	0.115	0.35	2.4	6.2	7.8	11.3	16.21
5	0.6	1.1	4.4	9.2	11.1	15.1	20
7	1.2	2.2	6.3	12	14	18	24
10	2.6	3.9	9.9	16	18	23	30
20	8.3	11	19.3	28	31	38	45
30	15	18	29.3	40	44	51	60

→ Ovako veliki χ^2 se očekuju sa malom v-ćom ako je sve u redu pa ako se ipak dobiju sugeriraju da nešto nije u redu! (odnosno, da eksterna greška nije veća od interne samo zbog statističke fluktuacije).

→ v-ća je 50% da se dobije $\chi^2 \gtrsim 1$!

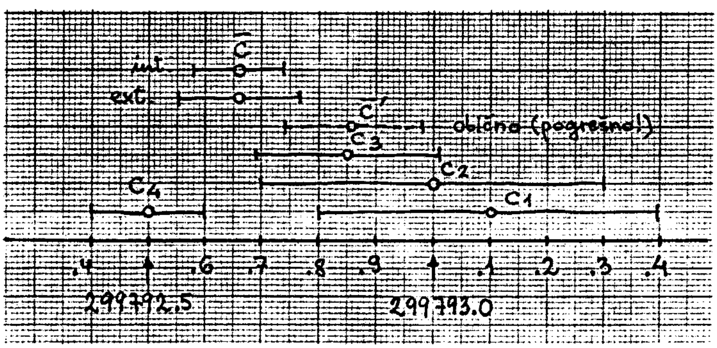
$\boxed{\text{NB:}}$ Ponekad se, čak i kada χ^2 sugerira nekonzistentnost podataka, usrednjavanje ipak izvrši, a kao greška sr. v-sti sr. v-sti se citira eksterna greška, tj. $S_{\overline{x}} = S_{ext} = S_{int} \cdot \sqrt{\chi^2}$. To je sumnjiva procedura, a čak se gubi i svrha usrednjavanja, ako je takva greška veća od najmanje parcijalne greške!

PRIMER: Najtačnija merenja brzine svetlosti do 1965. god. bila su:

		c	± stand. gr.	$w = 1/S^2_{(x)}$
Bergstrand	1951	299793.1	0.3	11.1
Froome	1954	299793.0	0.3	11.1
Bergstrand	1957	299792.85	0.16	39
Froome	1958	299792.50	0.10	100

$$\Rightarrow \overline{c} = \frac{11c_1 + 11c_2 + 39c_3 + 100c_4}{11+11+39+100 = 161}$$

$$S_{\overline{c}} = S_{int} = \frac{1}{\sqrt{\Sigma w}} = \frac{1}{\sqrt{161}} = 0.08$$



$$\Rightarrow c = \underline{299792.67(8)}$$

$$S^2_{ext} = \frac{1}{4 \cdot 161} \left\{ (3.1-2.67)^2 \cdot 11 + (3.0-2.67)^2 \cdot 11 + (2.85-2.67)^2 \cdot 39 + (2.50-2.67)^2 \cdot 100 \right\} \Rightarrow$$

$S_{ext} = 0.107$ i

$$\chi^2 = \frac{S^2_{ext}}{S^2_{int}} = 1.79 \text{ pa je}$$

$$\chi^2 \cdot (n-1) = 5.36$$

što pri usrednjavanju $n = 4$ sr. v-sti ima relativno veliku v-ću da se pojavi ($\gtrsim 10\%$) te se pouzdano može smatrati da su podaci konzistentni i da se mogu usrednjavati.

- Obično (pogrešno!) usrednjavanje dalo bi (v. gornju sliku):

$$\overline{c}' = \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4}{4} = 299792.86 \quad \text{i} \quad \Delta c = \frac{1}{4}\sqrt{(\Delta c_1)^2 + (\Delta c_2)^2 + (\Delta c_3)^2 + (\Delta c_4)^2} = 0.116.$$

$\boxed{\text{NB}}$ Ista procedura usrednjavanja često se preporučuje i kada je potrebno usrednjiti bilo kakve rezultate koji su dati sa bilokakvim greškama. Težine su i tada jednake recipročnim vrednostima tih grešaka a o svrsishodnosti procedure treba razmisliti u svakom konkretnom slučaju.

NB: Teorija bez eksperimenata je siromašna fizika.

Iako je značenje χ^2 problematično kada izvorne veličine nisu normalno distribuirane ovo se ipak koristi, no to i nije jedino mesto gde se egzaktan statistički tretman koristi u labavom smislu.

- Ako se na gornji način otežinjeno usrednjava n srednjih vrednosti često se koristi tzv. "efektivni broj rezultata" n_{eff} koji je definisan kao:

$$n_{eff} = \frac{\left(\sum_1^n w_i\right)^2}{\sum_1^n w_i^2}$$

Sa očigledno zgodnim osobinama da $n_{eff}\Big|_{w_i \gg w_j} \longrightarrow 1$ (teži 1 kada je jedna težina mnogo veća od svih ostalih, tj. kada efektivno samo jedan rezultat i doprinosi usrednjavanju) i $n_{eff}\Big|_{w_i \simeq const} \longrightarrow n$ (teži n u tzv. ekvitežinskom slučaju).

(npr. u našem primeru gore je $n_{eff} = 161^2/11763 = 2.2$ a broj merenja je 4).

- Lako se pokazuje važna osobina otežinjene sr. v-sti: to je ona vrednost koja minimizira χ^2, to je ona v-st od koje je sr. kv. odst. svih sr. v-sti minimalno:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\,\frac{\sum w_i (a - \langle x\rangle_i)^2}{n-1} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial a}\left\{a^2 \sum w_i - 2a\sum w_i \langle x\rangle_i + \sum w_i \langle x\rangle_i^2\right\}$$

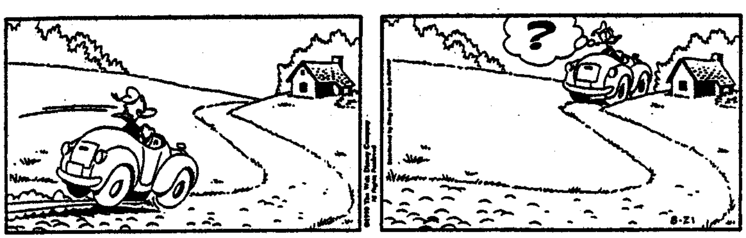
$$= \quad 2a\sum w_i - 2\sum w_i \langle x\rangle_i \quad = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{\sum w_i \langle x\rangle_i}{\sum w_i} \equiv \bar{x} \qquad \text{QED.}$$

- Naš BASIC program # 3 nalazi sr. v-st sr. v-sti, internu i eksternu grešku, i χ^2.

П
А
Ј
А

П
А
Т
А
К



The road to wisdom? - Well, its plain
and simple to express:
Err
and err
and err again
but less
and less
and less.

"Grook"
Piet-a Hein-a

Teorija relativnosti je, između ostalog, odraz činjenice da svaka materijalizovana dužina na Zemlji sadrži isti broj talasnih dužina stacionarnog elektromagnetnog talasa, bez obzira na njenu orijentaciju u prostoru.

(28) GRAFIČKO PREDSTAVLJANJE EKSPERIMENTALNIH REZULTATA

"Grafik" je najočigledniji način prikazivanja zavisnosti jedne fiz. veličine od druge. Zavisnost je najčešće poznata samo u konačnom broju diskretnih eksperimentalnih tačaka. Konačno osmišljenje grafika sastoji se u nalaženju konkretne funkcionalne zavisnosti između predstavljenih eksp. veličina koja najbolje zadovoljava sve eksp. tačke, tj. u "provlačenju" kontinuirane krive kroz eksp. tačke na najbolji mogući način. To je obično najlepši deo obrade rezultata i njega prevazilazi samo uzbuđenje pri očekivanju i dobijanju prvih eksperimentalnih rezultata. Prednosti grafičkog prikazivanja su:

① Ovakav analogni prikaz je (za iskusno oko!) vizuelno sveobuhvatan, za razliku od izvornog digitalnog prikaza (tabele) koji je bolji za računsku obradu, ali sam za sebe ne govori ništa. Grafik jasno ističe oblik funkcionalne zavisnosti; postojanje maksimuma i minimuma, infleksija; eventualne promene funkcionalne zavisnosti u određenim vrednostima, brzinu promene, itd.

② Grafički prikazani rezultati lako se (bar približno) interpoliraju i ekstrapoliraju. Grafički se lako, i bez poznavanja analitičkog oblika funkcionalne zavisnosti, jedna veličina u odnosu na drugu može diferencirati ili integraliti i time naslutiti podležući zakon koji ih vezuje, pa eventualno i model procesa.

③ Simultani grafički prikaz eksperimentalne i teorijske zavisnosti jasno govori ili o:
a) Slaganju eksperimenta i teorije u granicama eksperimentalnih grešaka, ili o
b) Postojanju i veličini neuračunatih sistematskih grešaka u eksperimentu, ili o
c) Neadekvatnosti date teorije za opis konkretne eksp. situacije (u datom opsegu v-sti).

- Da bi ove prednosti grafika u potpunosti došle do izražaja moraju se poštovati neka pravila u njihovoj konstrukciji i prezentaciji:

① Sve eksperimentalne tačke moraju biti jasno označene različitim simbolima, ako ima više eksperimenata, ili za razne v-sti parametara (○, ×, △, □, itd). Često je potrebno ucrtati (bar ponegde) i veličine procenjenih eksp. grešaka.

② Razmere, jedinice i početke odbroja na osama ("bias") odabrati tako da što veća površina grafika bude pokrivena relevantnom informacijom. Razmere i skale promeniti na delu grafika gde je to potrebno da bi se zanimljiv deo zavisnosti bolje istakao (tu je uvek dobro i povećati gustinu eksp. tačaka i smanjiti eksp. greške ako se može). Sve ovo uraditi tako da se rezultati vizuelno razlikuju ako im se ma koja sigurna cifra razlikuje, ali i tako da rastur usled eksperimentalnih grešaka ne bude preveliki, tj. da razmera priguši neinteresantne i ometajuće statističke fluktuacije (Ovo, jasno, zavisi od reda veličine traženog efekta). Takođe se treba truditi da najveći deo krive sa osama zaklapa ugao od $\sim 45°$.

③ Označiti jedinice i vrednosti na osama nedvosmisleno

④ Uz svaki grafik mora da ide i minimalno tekstualno objašnjenje: šta je predstavljeno, vrednosti parametara, itd. - takva vizuelno kondenzovana i sveobuhvatna informacija treba da je samodovoljna.

[Grafičke i numeričke metode se dopunjuju. Izvor grafika su ipak tabelirani podaci - oni su primarni i time jedini pouzdani za dalju numeričku obradu visoke tačnosti. Korišćenje brzih digitalnih računara u eksperimentima omogućilo je dobijanje ranije nezamislivih rezultata i oni su nesumnjivo najjači pomoćni alat savremene eksp. fizike. No, i tu treba biti oprezan. Numerička moć, tačnost i brzina (računara) često je nepotrebna i pruža lažan utisak o u suštini nepostojećoj egzaktnosti zaključaka. Razmišljanje i zaključivanje na osnovu celokupnog istraživačkog iskustva, znanja i intuicije, sa olovkom u ruci, nad papirom i grafikom, predstavlja veliko kreativno finale svakog eksperimenta. (O tzv. "intelektualnoj analizi podataka" v. UT #(18)).]

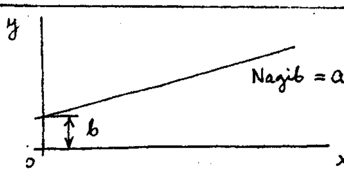
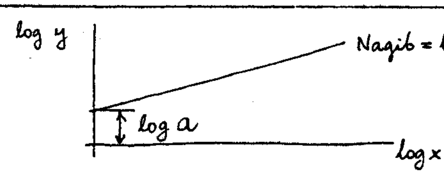
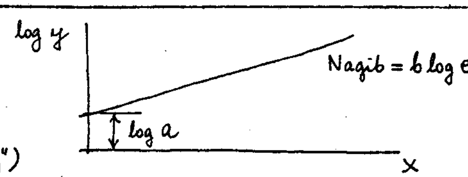
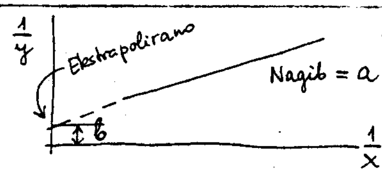
"Tako nam istina nije poznata ona postoji i neminovno nam nameće put koji moramo da sledimo" Jacques Hadamard

USTANOVLJAVANJE FUNKCIONALNE ZAVISNOSTI: Vrednost koju data fizička veličina ima u ispitivanom sistemu zavisi od vrednosti svih ostalih fiz. veličina koje opisuju stanje sistema - a njih je uvek veći broj. Upoznavanje ovih složenih međuzavisnosti moguće je samo u parovima veličina, tj. jednu veličinu biramo za nezavisno (kontrolisano) promenljivu, x, drugu za zavisno promenljivu, y, a ostale celo vreme držimo stalnim i zovemo ih parametrima, $p_1, \ldots, p_n$, sistema, odnosno date funkcionalne zavisnosti - dakle, $\boxed{y = f(x; p_1, p_2, \ldots, p_n)}$.
Konkretan oblik svake funkc. zavisnosti zavisi dakle od dve strane:
① od analitičkog oblika - tipa - funkcionalne zavisnosti f, (što daju jedne teorije)
② od konkretnih brojnih vrednosti parametara u datom slučaju, p (što daju druge teorije).
Pod "ustanovljavanjem funkcionalne zavisnosti" (na osnovu njenog eksperimentalnog ispitivanja) na taj način podrazumevamo, u opštem slučaju, određivanje i ① i ②. Određivanje v-sti parametara (obavezno sa odgovarajućim eksp. greškama!) smatramo trećim načinom "merenja" (tj. nalaženja brojnih vrednosti) fizičkih veličina (pored direktnog i indirektnog merenja, kojima (inače) dobijamo vrednosti za veličine x i y.).
- Jednačine koje izražavaju funkcionalne zavisnosti između fiz. veličina (zakoni) mogu biti:
ⓐ Racionalne (teorijske), one izvedene iz primene odgovarajuće opšte teorije na konkretnu eksperimentalnu situaciju (ovde se misli na tačku ①, tj. na dati tip funkcije f, dok je za teorijsko određivanje vrednosti parametara najčešće potrebna neka druga - struktur- na - teorija) i
ⓑ Empirijske, one koje ne slede ni iz čega opštijeg već se ispostavlja da važe za neku klasu pojava ili sistema kojima pripada i ova ispitivana.
Ako se ima posla sa racionalnom zavisnošću (tj. ako je takva poznata) onda:
(a.1) Slaganje sa pretpostavljenim tipom zavisnosti je dobro pa grafička ili numerička analiza omogućava nalaženje brojnih vrednosti parametara teorije koji se inače ne mogu izračunati iz neke druge teorije. To je empirijsko nalaženje parametara teorije. (Npr. aktivnosti radioaktivnih materijala dobro poštuju teoriju radioaktivnog raspada i za svaki konkretan slučaj može se naći, recimo, poluživot datog materijala koji se inače pouzdano niotkud ne može izračunati. Poređenja računatih poluživota sa empirijskim favorizuje neke teorije u odnosu na druge i govori koliko i gde ih još treba doterivati).
(a.2) Postoji više pretpostavljenih teorijskih tipova zavisnosti (obično iz alternativnih opštih teorija) od kojih će se jedna najbolje slagati sa eksperimentom. Grafički ili numerički kriterijumi opet govore koja je to teor. zav. najbolja i koliko se slaže, odnosno ne, sa eksp.
Ako se racionalna zavisnost (još uvek!) ne zna onda se mora naći empirijska zavisnost (što su pojave i sistemi složeniji to je ovo češće). Tada imamo sledeće situacije:
(b.1) Iz ranijeg iskustva je poznato da proučavana pojava pripada klasi pojava koja je dobro opisana datim tipom empirijske zavisnosti. Grafički ili numerički metodi mogu naći brojne vrednosti parametara ovakve zavisnosti u konkretnom slučaju (koji često nemaju jasnu fizičku interpretaciju te i nemaju status pravih fizičkih veličina, pa im se, recimo, ni greške ne moraju određivati). Ovo je očigledno slično slučaju pod a.1.
(b.2) Nije poznat čak ni tip empirijske zavisnosti (ili se ispostavlja da pretpostavljeni racionalni ili empirijski tip ne odgovara). Dok se ne nađe odgovarajući teorijski model pojave a time i racionalna jednačina (ili ako za tim ne postoji interes!) poželjno je naći, grafički ili numerički, empirijsku zavisnost koja najbolje odgovara. Ovo je slično slučaju a.2.
Nalaženje empirijske zavisnosti uvek je korisno. Čak i ako samo delimično odgovara, a prosta je, ona omogućava da se odmah vidi koji bi od poznatih modela, dif. j-na, i sl, bar u prvoj aproksimaciji odgovarao datoj pojavi. Odstupanje od te jednostavne zavisnosti govori koliko i kako korigovati jednostavni model. Svi gore navedeni problemi mogu se rešavati i grafičkim i numeričkim metodama. Najmoćnija numerička metoda je metod najmanjih kvadrata (v. sl. glavu) ali su i tu grafički metodi od pomoći. O nekim grafičkim metodama sledi:

"Nema gore laži od loše shvaćene istine" William James

LINEARIZACIJA GRAFIKA: Ovome se pristupa ili ⓐ Kada je funkcionalna zavisnost unapred poznata i kada se želi nalaženje parametara funkcije sa grafika ili želi grafička inter- ili ekstrapolacija ili ⓑ U proceduri traženja nepoznate funkcionalne zavisnosti kada se traži reprezentacija koja će linearizovati grafik a time naći i tip zavisnosti (i simultano i njene parametre) ili ⓒ Kada se želi da grafički utvrdi koliko se pretpostavljena funkcionalna zavisnost (racionalna ili empirijska) koju data reprezentacija linearizuje slaže ili ne slaže sa eksperimentalnim rezultatima. Za običan grafički prikaz rezultata linearizaciju po pravilu ne treba vršiti – (šta imamo od toga ako su sve zavisnosti ovog sveta prave linije!) – poenta i jeste u tome da grafik prikaže sve bitne karakteristike konkretnog slučaja. Šta će se raditi, jasno, zavisi od toga šta se hoće. Da bi se uspešno rukovalo podacima mora se razumeti fizika iza njih!

⇒ Pogodnim izborom skala (tj. smenama promenljivih) gotovo svaka analitička funkcija se može (ili bar deo po deo) linearizovati. Transformacije u linearnu reprezentaciju za osnovne dvoparametarske f-je su:

funkcionalna zavisnost	Metod crtanja	Grafičko odredjivanje parametara
$y = ax + b$	y protiv x na lin – lin papiru	
$y = ax^b$ $\log y = \log a + b \log x$	$\log y$ protiv $\log x$ na lin – lin papiru ili y protiv x na log – log papiru	
$y = ae^{bx}$ $\log y = \log a + bx$	$\log y$ protiv x na lin – lin papiru ili y protiv x na lin – log papiru ("semi-log")	
$y = \dfrac{x}{a+bx}$ $\dfrac{1}{y} = \dfrac{a}{x} + b$	$\dfrac{1}{y}$ protiv $\dfrac{1}{x}$ na lin – lin papiru	

"Uprkos velikog divljenja za moje prijatelje teoretičare ne mogu da se otmem uverenju da su toliko dugo zastrašivali nuklearne fizičare sve dok ovi nisu počeli da veruju da je njihova jedina funkcija da proveravaju teoretičarske hipoteze, da odlučuju koja je od njih ispravna a koja ne... Fizika je u prošlosti napredovala kroz naizmenična otkrića eksperimentalaca i teoretičara. Ali ova prirodna simbioza je sada razbijena predrasudama koje su teoretičari nametnuli eksperimentalcima. Molim moje teorijske prijatelje da stanu pre no što sruše ceo hram na sve nas. Načinimo još neko otkriće kao što je bila superprovodnost, koja je čekala pedeset godina da je teoretičari objasne... Naše sadašnje procedure odlučivanja (koji ćemo eksperiment finansirati a koji ne) skoro da garantuju da se ništa neočekivano neće naći"

Luis Alvarez, Adventures in Experimental Physics, Vol V (1971) V

Po teoriji informacija, živeti, znači obogaćivati svoj um. J. L. Rigal

GRAFIČKO FITOVANJE (PODEŠAVANJE) FUNKCIJE KROZ EKSP. TAČKE: Neka opšta pravila su:

- Kriva treba da je glatka i svaka infleksija treba da je dobro opravdana eksp. tačkama (tu eventualno treba meriti gušće i/ili sa manjim eksp. greškama)
- Kriva treba da prolazi razumno blizu svih eksp. tačaka (bar kroz granice grešaka) a ne kroz njih, implicitno primenjujući logiku metoda najmanjih kvadrata.
- Krajnjim tačkama ne treba davati preveliku težinu, naročito kada odgovaraju krajevima opsega upotrebljenih instrumenata ili domete metode.

Jednom nacrtana funkcija omogućava da se, bez poznavanja njenog analitičkog oblika, vrednosti funkcije sa grafika koriste za sve potrebe. Njen grafik ekvivalentan je matematičkom izrazu a često ima dovoljnu tačnost, imajući u vidu postojanje eksp. grešaka koje sam matematički izraz (obično) ne uzima u obzir. Ako se, međutim, matematički izraz želi, on se može egzaktno naći numerički (metodom najmanjih kvadrata) ili semikvantitativno i semigrafički, što je obično dovoljno u slučajevima empirijskih zavisnosti i što ćemo sada opisati.

IZBOR POGODNOG TIPA EMPIRIJSKE JEDNAČINE: Dobra empirijska jednačina je ona koja dobro reprodukuje eksp. podatke a ima najmanje slobodnih parametara (Ovo proističe iz tendencije da se smatra da su prirodni zakoni jednostavni, što inače ne mora uvek da bude tačno!). Procedura je sledeća:

- Po nacrtanoj funkciji – grafiku – treba prepoznati tip funkcionalne zavisnosti
- Naći parametre zavisnosti
- Proveriti slaganje sa grafikom, tj. eksp. tačkama
- Ako ne valja, probati drugi tip f-je, itd…

• Prvi test opravdanosti izbora funkcionalne zavisnosti sastoji se u prikazivanju eksp. tačaka u onoj reprezentaciji koja linearizuje predloženu funkcionalnu zavisnost ⇒ Ako eksp. tačke leže na pravoj liniji ⇒ funkcija je dobra. Ako to nije moguće uraditi primenjuje se:

• Tablični test: Procedura zavisi od predložene jednačine ali opšti koraci su:

- Ucrtaju se eksp. tačke i kroz njih provuče najbolja kriva
- Sa grafika se pročitaju vrednosti funkcije u ekvidistantnim tačkama (najbolje celobrojnim) (po Δx, $\Delta(1/x)$ ili $\Delta(\log x)$).
- Formiraju se sukcesivne razlike vrednosti funkcije u ovim tačkama (pročitane sa grafika)
- Ako su sve, za date tip f-je određene, konačne razlike približno jednake f-ja je dobro izabrana

⇒ Procedure i kriterijumi za izbor funkcionalne zavisnosti:

Pretpostavljena funkcionalna zavisnost	Procedura bazirana na stalnoj vrednosti za $\Delta x, \Delta(\frac{1}{x})$ ili $\Delta \log x$: Sačiniti tabelu za	Naći ove sukcesivne razlike	Kriterijum za valjanost izbora *) jednaki ≡ približno jednaki
$y=a+bx+cx^2+\dots+gx^n$	$y=f(x)$	$\Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^n y$	svi $\Delta^n y$ su jednaki *)
$y^2=a+bx+\dots+gx^n$	$y^2=f(x)$	$\Delta y^2, \Delta^2 y^2, \dots, \Delta^n y^2$	$\Delta^n y^2$ jednaki
$\log y=a+bx+\dots+gx^n$	$\log y=f(x)$	$\Delta(\log y), \Delta^2(\log y), \dots, \Delta^n(\log y)$	$\Delta^n(\log y)$ jednaki
$y=ab^x$	$\log y=f(x)$	$\Delta(\log y)$	$\Delta(\log y)$ jednaki (≡ graf. lineariz.)
$y=ax^b$	$\log y=f(\log x)$	$\Delta(\log y)$	$\Delta(\log y)$ jednaki
$y=a+bx^c$	$y=f(\log x)$	$\Delta y, \log \Delta y, \Delta(\log \Delta y)$	$\Delta(\log \Delta y)$ jednaki

Primer: Neka je kroz neke eksp. tačke povučena najbolja kriva i neka su sa nje pročitane vrednosti iz sledeće tabele; i ako nam f-ja liči na parabolu (slučaj 1. gore) ⇒

x	1	2	3	4	5	6
y	2.5	6	10.5	16	22.5	30

Δy: 3.5 4.5 5.5 6.5 7.5

$\Delta^2 y$: 1 = 1 = 1 = 1 ⇒

"… matematička istina se otkriva a ne izmišlja. Ono što evoluira nije matematika nego naše znanje o njoj" Moris Kline

$\Rightarrow$ pretpostavka o paraboli je u redu, a pošto je $y(0)=0 \Rightarrow$ $\underline{y = ax^2 + bx}$

Ovakve procedure uvek su korisne kao uvod u nalaženje parametara odgovarajuće zavisnosti, bilo da se to radi numerički bilo semigrafički, o čemu ćemo sada nešto više reći.

SEMIGRAFIČKO ODREĐIVANJE VREDNOSTI PARAMETARA FUNKCIONALNE ZAVISNOSTI:

Kada je funkcionalna zavisnost odabrana (empirijska, ali za brzu procenu može i racionalna) treba naći njene parametre. Pomenućemo dva metoda:

1. linearizacija – o kojoj smo već dovoljno govorili
2. Metod izabranih tačaka; koji se sastoji od sledećih koraka:

- Ucrtaju se eksp. tačke i kroz njih provuče najbolja kriva
- Sa krive se izabere n tačaka, koliko nepoznatih parametara funkcija ima. Zgodno je da budu u celobrojnim tačkama. Tačke treba da su dovoljno udaljene i da pokrivaju karakteristične delove krive. Ako krajevi krive nisu sigurni tu ih ne treba birati.
- Zameniti redom tih n parova (x,y) tačaka u izabranu funkciju. Tako se dobija n jednačina sa n nepoznatih (parametara).
- Rešenje skupa od n jednačina daje vrednosti n parametara, tj. celu funkcionalnu zavisnost. Ovo može biti jako teško ako je jednačina transcendentalna ali ako je linearna po parametrima (ili ako se može linearizovati) stvar se pojednostavljuje upotrebom determinanata.

Primer: Nađimo vrednosti parametara a i b u gornjem primeru: uzmimo v-sti f-je za $x = 3$ i 6 $\Rightarrow$

Sistem j-na je: $y = ax^2 + bx$

$$10{,}5 = a\cdot 9 + b\cdot 3$$
$$30 = a\cdot 36 + b\cdot 6$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} y & x^2 & x \\ 10{,}5 & 9 & 3 \\ 30 & 36 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y(9\cdot 6 - 36\cdot 3) - x^2(10{,}5\cdot 6 - 30\cdot 3) + x(10{,}5\cdot 36 - 30\cdot 9) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2}{2} + 2x} \text{ QEI} \Rightarrow (a = 0{,}5;\ b = 2)$$

Osnovni nedostatak ovakvog metoda je što ne može da odredi greška ovih parametara te što ih ne možemo smatrati potpunim i autentičnim fizičkim veličinama (ne znamo tačnost kojom su određeni). Pogledajmo sada kako sve to radi egzaktan numerički metod najmanjih kvadrata.

(29) SLUČAJNA (I SISTEMATSKA) GREŠKA VELIČINE ODREĐENE PARAMETARSKIM MERENJEM – PODEŠAVANJE PARAMETARA FUNKCIJE METODOM NAJMANJIH KVADRATA

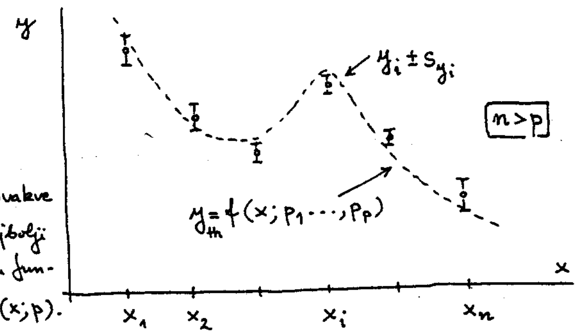
Neka je stanje sistema koga posmatramo jednoznačno opisano sa $p+2$ fizičke veličine koje ćemo označiti sa $x, y, p_1, p_2, \ldots, p_p$. Ako u eksperimentu p veličina p_i $(i=1,2,\ldots,p)$ držimo stalnim (tj. onoliko stalnim koliko je to moguće) i zovemo ih parametrima a stanje sistema menjamo kontrolisano menjajući veličinu x i pritom je merimo "vrlo tačno" (greška nezavisno promenljive v-ne se može zanemariti u odnosu na ostale greške) tada će veličina y u skladu sa zakonitošću $F(x, y; p_1 \cdots p_p) = 0$ koja vlada u sistemu uzimati vrednosti $y = f(x; p_1 \cdots p_p)$. Da ovu zavisnost (zakon) f

Da li je Ajnštajn otkrio relativnost ili ju je izmislio?

"Sve treba načiniti najjednostavnije moguće, ali ne jednostavnije od toga" A. Einstein

upoznamo, proverimo, itd. Ove vrednosti y merimo u n stanja sistema dobijajući svaki put par vrednosti (x_i, y_i) $(i=1,2,\dots,n)$. Pretpostavka je da su merenja v-ne y_i visoke osetljivosti i da u svakom od ovih stanja vrednost za y primetno fluktuira. U svakom od tih stanja stoga ćemo v-nu y meriti više puta što će resultirati u srednjoj v-sti $\langle y\rangle_i$ u stanju x_i i slučajnoj grešci te sr. v-sti, $S_{\langle y\rangle_i}$. Umesto toga međutim, jednostavnosti radi pisaćemo kao i do sada $y_i \equiv \langle y\rangle_i$ i $S_{y_i} \equiv S_{\langle y\rangle_i}$ podrazumevajući uvek gornje značenje ovih simbola. Tablični i grafički prikaz te tipične situacije je:

i	x_i	y_i	S_{y_i}
1	x_1	y_1	S_{y_1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n	S_{y_n}



Sada je pitanje kako kroz ovakve eksperimentalne tačke na najbolji mogući način "provući" datu funkcionalnu zavisnost $y_{th}=f(x;p)$. Kada je jednom oblik f ove zavisnosti fiksiran to se svodi na određivanje vrednosti skupa p parametara, što i jeste suština trećeg, parametarskog načina merenja u fizici. Pored toga, da bi merenje bilo validno, moramo imati i definisanu proceduru za nalaženje grešaka ovih veličina: $s_{p_1},\dots,s_{p_p}$. Procedura koja upravo radi sve ovo punim imenom se zove "podešavanje parametara funkcije Metodom Najmanjih Kvadrata" (MNK) [engl. "Least Square Fitting", LSF). Ona je egzaktno fundirana u okviru tzv. metoda najverovatnijeg ishoda (maximum likelihood method) ali ćemo se mi zadovoljiti jednostavnim plauzibilnim argumentima.

Problem je sličan onome u kome nam se otežinjena sr. v-st javila kao onaj (jedan) parametar koji minimizira zbir kvadrata odstupanja n resultata (sr. v-sti) merenih svaki put u istom stanju sistema (broj stepeni slobode $n-1$) dok sada treba naći funkciju koja izborom vrednosti p parametara minimizira zbir kvadrata odstupanja n resultata (sr. v-sti $y_i(x_i)$) merenih u n različitih stanja sistema (broj stepeni slobode $n-p$). Pritom kao da funkcija "izravnjava" podatke, što i svodi problem na onaj prvi. Dakle, po analogiji sa otežinjenom sr. v-šću možemo smatrati da u f-ji $y_{th}=f(x;p_1\dots p_p)$ uvek iste parametre p_i treba da odredimo tako da sr. v-st kvadrata odstupanja eksperimentalnih v-sti $y_i(x_i)$ onih koje daje ova f-ja, $y_{th,i}=f(x_i;p_1\dots p_p)$, bude minimalna, tj.

$$\chi^2=\frac{1}{n-p}\sum_{1}^{n}\frac{(y_{th,i}-y_i)^2}{S_{y_i}^2}=\min .$$

Pošto je $y_{th,i}$ f-ja p parametara to je i χ^2 f-ja tih parametara pa se minimizacija χ^2 realizuje zadovoljavanjem sledećih p j-na:

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial p_1} = 0 \ , \ \frac{\partial \chi^2}{\partial p_2} = 0 \ , \ \ldots \ , \frac{\partial \chi^2}{\partial p_p} = 0 \ .$$

Ako su ove j-ne linearne po parametrima (linearni MNK) onda su egzaktno rešive a ako su nelinearne (nelinearni MNK) onda postoje različiti algoritmi za njihovo približno rešavanje. U svakom slučaju dobijamo skup v-sti parametara koji daje najmanju moguću v-st χ^2 za dati tip f-je f, tj. funkciju koja na najbolji mogući način prolazi kroz date eksp. tačke. Kako je χ^2 distribuirano po χ^2 raspodeli to očekujemo da tada u proseku merene v-sti y_i odstupaju od onih koje daje f-ja y_{th} za veličinu greške te v-sti S_{y_i}:

$$\chi^2 = \frac{1}{n-p}\sum_1^n \underbrace{\boxed{\frac{(y_{th,i}-y_i)^2}{S_{y_i}^2}}}_{\simeq 1} \simeq 1$$

sa v-ćom ~50%, tj. da se v-st $\chi^2 \gtrsim 1$ dobije u ~50% slučajeva. (Ponekad se ne posmatra v-na χ^2 već tzv. suma najmanjih kvadrata S (least square sum) $S = \chi^2(n-p)$, što je obično i tabelirano). Aktuelna v-st χ^2 dobijena u fitu minimizacijom, po tabeli v-ća za dobijanje datog χ^2 je, kako se to kaže, kvantitativni <u>kriterijum kvaliteta fita</u>.

Jasno je da broj tačaka n u kome "uzorkujemo" funkciju mora biti veći od broja njenih parametara p, $n > p$, jer za $n = p$ funkcija prolazi tačno kroz eksp. tačke što, obzirom na obavezni rastur oko stvarne funkcionalne zavisnosti (jer nemamo po ∞ merenja u svakoj tački!), nema nikakvog smisla. Matematički, tada algoritam kolabira jer je i $S = 0$ i $n - p = 0$.

Ako se u fitu dobije vrednost χ^2, odnosno S, koja se, za dati broj stepeni slobode, javlja sa v-ćom manjom od 0.1% (jednom u hiljadu slučajeva) onda nešto nije u redu – ali šta, to već nije jasno i od slučaja do slučaja razlozi mogu biti različiti (svako neslaganje implicira poređenje dve stvari pa odgovorna može biti bilo koja). U slučaju <u>racionalne</u> funkcionalne zavisnosti, kod kojih je egzaktna primena MNK i stvarno opravdana, taj "loš kvalitet fita" može biti posledica ili ① Suštinski lošeg tipa funkcije, odnosno neadekvatnosti date teorije za opis date situacije (to je uvek srećan događaj!) ili ② lošeg eksperimenta (jasno, to je čista nesreća) kada su moguća dva principijelno različita slučaja: ②a U eksperimentu su prisutne nekorigovane sistematske greške, tj. stvarna funkc. zavisnost ne odgovara pretpostavljenoj teorijskoj – fituje se, de facto, loš tip funkcije. Razlike od slučaja ① formalno nema! ②b Slučajne greške su potcenjene, tj. stvarni rastur tačaka oko $f(x;p)$ je veći no što je to izraženo procenjenim vrednostima za S_{y_i} (Δy_i), što se može utvrditi vizuelnom inspekcijom kada preveliki "nemir" eksp. tačaka oko pretpostavljene f-je (van granica procenjenih grešaka) sugerira ovakvu situaciju, odnosno kada bi funkcija koja bi prolazila kroz većinu "repova grešaka" bila nerealno nemirna (tj. morala da ima suviše parametara). ⇒ Ako se MNK koristi kao kriterijum o valjanosti alternativnih teorija mora se, što je sasvim jasno, uveriti prvo u ispravnost svih aspekata eksperimenta.

Jasno je da MNK sam po sebi ne ukazuje na tip jednačine koji bi dao najbolji fit kroz date eksp. tačke.

"Priroda koristi što je manje moguće svega" Johannes Kepler

On samo daje najbolje vrednosti parametara funkcionalne zavisnosti koja je izabrana na osnovu potpuno nezavisnih argumenata i koja može biti i potpuno neadekvatna. O tome MNK govori tek a posteriori po već izvršenom fitu, preko χ^2 testa. U prethodnom izboru najboljeg tipa f-je od velike pomoći mogu biti grafički i semigrafički metodi. Osnovna prednost numeričkih metoda je, međutim, u tome što pripisuju definisane greške vrednostima parametara fitovane funkcije i time njihove dobijene vrednosti dižu na nivo pravih fizičkih veličina. Na taj način numerički MNK predstavlja pravi treći način (pored direktnog i indirektnog merenja) za merenje fiz. veličina – parametara funkcionalnih zavisnosti.

• FORMALIZAM LINEARNOG MNK:

Pod linearnim MNK podrazumeva se slučaj fitovanja funkcije opšteg oblika:

$$y_{th}(x; p_1 \cdots p_p) = p_1 z_1(x) + p_2 z_2(x) + \cdots + p_p z_p(x)$$

gde su v-ne p_j $(j=1,2,\dots p)$ parametri zavisnosti koji linearno ulaze u f-ju i koji se određuju fitom a $z_j(x)$ su neparametarske funkcije nezavisne varijable x. Specijalni a čest slučaj linearnog fita je polinomijalni fit u kome su $z_j(x) = x^{j-1}$. Ako su vrednosti v-ne y merene u n tačaka x_i $(i=1,2,\dots,n)$ $(n>p)$ sa rezultujućim v-stima y_i onda ovim tačkama odgovaraju v-sti f-je $y_{th,i} = \sum_{j=1}^{p} p_j z_{ij}$ gde $z_{ij} = z_j(x_i)$ predstavljaju v-sti f-ja z_j u tačkama x_i.

Sada MNK suma S koja se minimizira glasi:

$$S = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(y_i - \sum_{j=1}^{p} p_j z_{ij}\right)^2 \qquad \text{sa} \qquad w_i = 1/s_{y_i}^2$$

p uslova njenog minimuma su $\dfrac{\partial S}{\partial p_k} = 0$ $(k=1,2,\dots p)$ odnosno:

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ik} w_i \left(y_i - \sum_{j=1}^{p} p_j z_{ij}\right) = 0 \quad \text{odakle je:} \quad \sum_{j=1}^{p} p_j \sum_{i=1}^{n} z_{ik} z_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{n} z_{ik} y_i w_i \quad [k=1,\dots p]$$

Ovih p j-na za p parametara (koje su linearne i time čine egzaktno rešiv sistem) p_j zgodno je predstaviti u matričnoj formi uvodeći matrice:

$$Z = (z_{ij}) = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1p} \\ z_{21} & z_{22} & & z_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{np} \end{bmatrix}}_{\text{broj parametara, } p}\right\} \text{broj merenja, } n \; ; \; W = \begin{bmatrix} w_1 & & 0 \\ & w_2 & \\ 0 & & \ddots \; w_n \end{bmatrix} ; \quad \begin{matrix} y = [y_1 \; y_2 \cdots y_n]^T \\ p = [p_1 \; p_2 \cdots p_p]^T \end{matrix}$$

pa u matričnoj formi one glase [za podsetnik o matricama v. Dodatak #2]:

$$Z^T W Z p = Z^T W y \quad \text{odakle je vektor parametara} \quad \boxed{p = (Z^T W Z)^{-1} \cdot Z^T W y}.$$

Tzv. varijaciono-kovarijaciona (VK) matrica ili matrica grešaka je: $\boxed{V = (Z^T W Z)^{-1}}$

Dijagonalni elementi ove $p \times p$ matrice, v_{jj}, daju greške parametara: $\boxed{s_{p_j} = \sqrt{v_{jj}}}$

a nedijagonalni elementi, v_{jk}, su mera stepena korelacije između parametara p_j i p_k, pa

Sadašnje stanje dinamičkog sistema jednoznačno određuje njegova buduća i prošla stanja. Sadašnje stanje stohastičkog sistema statistički određuje samo njegova buduća stanja (tzv. termodinamička "strela vremena").

je korelacioni koeficijent ϱ_{jk}, koji pokazuje koliko će se parametar p_j promeniti za neku promenu p_k, i koji se mora koristiti pri računu grešaka veličina koje su računate iz parametara p_j, jednak:

$$\boxed{\varrho_{jk} = \frac{v_{jk}}{\sqrt{v_{jj}\,v_{kk}}}}.$$

Npr. ako u slučaju dvoparametarske f-je tražimo v-nu $Y(p_1,p_2)$ njena će greška, u skladu sa (*) sa str. 53 biti:

$$S_Y^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial p_1}\right)^2 S_{p_1}^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial p_2}\right)^2 S_{p_2}^2 + 2\left(\frac{\partial Y}{\partial p_1}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial p_2}\right) S_{p_1} S_{p_2}\, \varrho_{p_1p_2}$$

• FIT PRAVE LINIJE:

Ne koristeći ovaj opšti formalizam detaljno ćemo razmotriti najjednostavniji slučaj linearnog MNK, fit polinomom prvog reda, odnosno fit prave linije. Zbog toga što se, kao što smo videli, veći-na dvoparametarskih f-ja pogodnim transformacijama može linearizovati, tj. svesti na j-nu prave linije, to je i jedna od najčešće korišćenih procedura u svakodnevnoj praksi. Iako se ona danas u svim programima za obradu i prikazivanje rezultata izvodi bez problema (npr. ORIGIN®, itd) ova će nam diskusija razjasniti mnoge pojmove koji su zajednički i u svim složenijim situacijama (sâmo izvođenje svih računa inače obavlja i naš BASIC prog. #6). Da pojednostavimo notaciju od sad pa na dalje ćemo f-ju koju fitujemo označavati slovom f - dakle, f-ja koju fitujemo je $y_{te} \equiv f = p_1 x^0 + p_2 x^1$ što se danas gotovo bez razlike piše kao $f = a + bx$, gde je a odsečak na y osi a b nagib (koef. pravca) prave. Da ne pišemo sada $\nu = n - p$ minimiziraćemo $S = \chi^2(n-p)$, tj.

$$S = \sum_1^n w_i\,(y_i - f_i)^2 = \sum_1^n w_i\,(y_i - a - bx_i)^2$$

Uslovi minimuma su:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum w_i\, 2\,(y_i - a - bx_i)(-1) = 2\sum w_i\,(a + bx_i) - 2\sum w_i y_i = 0 \quad i$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum w_i\, 2\,(y_i - a - bx_i)(-x_i) = 2\sum w_i x_i\,(a + bx_i) - 2\sum w_i x_i y_i = 0$$

što daje dve tzv. normalne j-ne (dve lin. j-ne sa dve nepoznate, a i b):

$$\left.\begin{aligned} &\text{I}\quad a\sum w + b\sum wx = \sum wy \\ &\text{II}\quad a\sum wx + b\sum wx^2 = \sum wxy \end{aligned}\right\}$$

gde, pošto pod znakom sume ostavljamo samo indeksirane v-ne, indeks možemo i da ne pišemo. Rešenja ovog sist. j-na su:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{\sum w \sum wxy - \sum wx \sum wy}{\underbrace{\sum w \sum wx^2 - \left(\sum wx\right)^2}_{=\Delta}} = \frac{\sum w_i\,(x_i - \langle x\rangle)(y_i - \langle y\rangle)}{\sum w_i\,(x_i - \langle x\rangle)^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} \\ a &= \frac{\sum wx^2 \sum wy - \sum wx \sum wxy}{\Delta} = \frac{\sum wy}{\sum w} - b\,\frac{\sum wx}{\sum w} = \langle y\rangle - b\langle x\rangle \end{aligned}\right\} (*)$$

"U fizičkom svetu ne može se povećati količina bilo čega bez da mu se promeni kvalitet. Slične figure postoje samo u čistoj geometriji." Paul Valery gde smo uveli oznake $\langle x\rangle = \sum wx/\sum w$ i $\langle y\rangle = \sum wy/\sum w$, što nisu sr. v-sti x_i i y_i jer su ove merene u različitim stanjima sistema, već su to koordinate težišta polja rezultata (x_i, y_i) [i x koordinate su težinjene greškama y-a!] pa vidimo da MNK prava uvek prolazi kroz tačku sa tim koordinatama. I oznake $\sigma_{xy} = \sum w_i(x_i-\langle x\rangle)(y_i-\langle y\rangle)/\sum w_i$ i $\sigma_x^2 = \sum w_i(x_i-\langle x\rangle)^2/\sum w_i$ smo takođe uveli samo zbog formalne sličnosti sa kovarijansom v-na x i y i disperzijom za x, uglavnom da naglasimo da te veličine nisu ono što izgleda da jesu.

Dakle, parametri a i b se računaju po gornjim izrazima iz direktno merenih veličina x_i, y_i od kojih, kako smo za sada pretpostavili, samo v-ne y_i imaju slučajne greške S_{y_i}, te greške za a i b propagiraju iz ovih grešaka. Kada bi i x_i imali greške one bi mogle da budu korelirane sa y_i, što bi komplikovalo stvar. Greške za y_i su uzajamno nekorelirane pa je:

$$S_a^2 = \sum_1^n \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 S_{y_i}^2 \quad i \quad S_b^2 = \sum_1^n \left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2 S_{y_i}^2 \quad , \text{ uz } S_{y_i}^2 = \frac{1}{w_i}$$

Iz izraza za a i b $(\Delta \neq f(y_i))$ nalazimo:

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{1}{\Delta}\left(w_i \sum wx^2 - w_i x_i \sum wx\right) \quad i \quad \frac{\partial b}{\partial y_i} = \frac{1}{\Delta}\left(w_i x_i \sum w - w_i \sum wx\right).$$

pa je:

$$S_a^2 = \sum_1^n \frac{1}{\Delta^2}\left(w_i \sum wx^2 - w_i x_i \sum wx\right)^2 \cdot \frac{1}{w_i} =$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\sum_1^n \left[w_i\left(\sum wx^2\right)^2 - 2w_i x_i \sum wx \sum wx^2 + w_i x_i^2 \left(\sum wx\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left\{\left(\sum wx^2\right)^2 \sum w - \underbrace{2\sum wx \sum wx^2 \sum wx + \sum wx^2 \left(\sum wx\right)^2}_{\shortparallel}\right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left\{\sum w \sum wx^2 \sum wx^2 - \left(\sum wx\right)^2 \sum wx^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\Delta^2}\left\{\underbrace{\sum w \sum wx^2 - \left(\sum wx\right)^2}_{=\Delta}\right\} \cdot \sum wx^2 = \frac{\sum wx^2}{\Delta} \qquad \text{QEI}$$

i potpuno analogno:

$$S_b^2 = \frac{\sum w}{\Delta}$$, tj. standardne greške parametara a i b su:

Analizirajmo ukratko ove izraze:

$$\boxed{S_a = \sqrt{\frac{\sum wx^2}{\Delta}} \quad ; \quad S_b = \sqrt{\frac{\sum w}{\Delta}}} \qquad (**)$$

① Kako je $\Delta = \left[\sum w \sum wx^2 - \left(\sum wx\right)^2\right] \cdot \frac{\left(\sum w\right)^2}{\left(\sum w\right)^2}$

$$= \left(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2\right) \cdot \left(\sum w\right)^2$$ vidi se da su greške za a i b tim manje što je:

i.) Veći interval x_i u kome su merenja vršena, i

ii) Veće težine, odnosno manje greške, merenih v-sti y_i

NB: Greške parametara (**) je za slučaj fita sa malim brojem stepeni slobode $n-2$, tj. fita kroz mali broj tačaka n, i za nivo poverenja CL, korektno množiti Studentovim $t_{n-2,CL}$ (iz Tabele na str. 46)!

② Da utvrdimo karakter ovako nađenih grešaka za a i b posmatraćemo specijalan slučaj:

$b = 0$ i $\langle x \rangle = 0$ (što se smenom $x' = x - \langle x \rangle$ i $\langle x' \rangle = \langle x - \langle x \rangle \rangle = \langle x \rangle - \langle x \rangle = 0$ uvek može postići)

koji je ustvari ekvivalentan višestrukom merenju y_i (uvek u istom stanju). Zbog $\sum wx = 0$ tada je $a = \sum wy / \sum w = \langle y \rangle$ i

$$S_a = \sqrt{\frac{\sum wx^2}{\sum w \sum wx^2 - \cancel{(\sum wx)^2}^{\,0}}} = \frac{1}{\sqrt{\sum w}}$$

, što je ustvari interna greška srednje vrednosti $\langle y \rangle$. Ovo nam govori da su greške S_a i S_b, date sa (**), ustvari interne (a priori) greške parametara i da ne mere stvarni rastur tačaka oko funkcije, koji čak može biti i nedozvoljeno veliki – na njih se to, jednostavno, ne odražava! Ovim smo se takođe uverili da je MNK fitovanje zaista ekvivalent traženju otežinjene sr. v-sti. Po analogiji stvarni rastur tačaka oko funkcije treba da meri eksterna greška : $S_{ext} = S_{int}\sqrt{\chi^2}$, tj.

$$S_a^{ext} = S_a\sqrt{\chi^2} \quad i \quad S_b^{ext} = S_b\sqrt{\chi^2}.$$

No, za razliku od otež. sr. v-sti, ovde razlika između stvarnog i pretpostavljenog rastura oko fitovane funkcije, merena veličinom χ^2, tj. odnosom kvadrata eksterne i interne greške, može da potiče i usled pogrešnog izbora funkcionalne zavisnosti f (pored svih onih razloga kao kod otež. sr. v-sti).

- Kontrola kvaliteta fita kvantitativnom analizom vrednosti χ^2 otud je ovde bitna i uvek se mora sprovesti. Uz korišćenje uslova $\partial\chi^2/\partial a = 2\sum w(y - a - bx) = 0$ i $\partial\chi^2/\partial b = 2\sum wx(y - a - bx) = 0$ lako se pokazuje da je minimalna v-st χ^2 jednaka

$$\boxed{\chi^2 = \frac{1}{n-p}\sum_1^n w_i\,(y_i - a - bx_i)^2 = \frac{1}{n-p}\left\{\sum wy^2 - a\sum wy - b\sum wxy\right\}} \quad (***)$$

Korišćenje eksternih grešaka kao grešaka parametara, umesto internih, ovde je još sumnjivije nego kod otež. sr. v-sti i svaki put zahteva ozbiljnu analizu i argumentaciju. Ako je v-st χ^2 zadovoljavajuća, fit je kako treba i koriste se interne greške. Ako je χ^2 tako veliki da je v-ća da se pojavi, a da je ipak sve u redu, mala onda prvo treba utvrditi da li je to usled pogrešnog tipa fitovane f-je. To je, nažalost retko, srećan slučaj jer znači da smo otkrili novi zakon u ispitivanoj pojavi – mnogo češće to znači da merenja iz nekog razloga nisu sistematski u redu. Spektar uzroka velikog χ^2 je, jasno, i mnogo širi od toga ali je bitno da se dijagnostika uzroka uvek nalazi van metoda MNK. (Kod empirijskih zakonitosti, gde je argumentacija o tipu f-je labava, situacija nije tako ozbiljna, pa može biti dozvoljeno i korišćenje eksterne greške parametara.

I u dinamičkim i u statističkim pojavama moguće je egzaktno predviđanje budućnosti dok je rekonstrukcija prošlosti moguća samo u dinamičkim.

• Važan i čest slučaj je, kako rekosmo, fitovanje prave linije kroz linearizovane podatke. Ako se prilikom transformacije koja linearizuje datu nelinearnu f-ju $y = f(x)$ transformiše i v-nost y moraju se transformisati i greške za y, S_y, odnosno i težine u fitu. Ako je linearizujuća smena $Y = g(y)$ greške za Y će biti

$$S_{Y_i} = \frac{\partial g}{\partial y} \cdot S_{y_i} = \frac{\partial Y}{\partial y} S_{y_i}$$

a težine u linearnom fitu postaju $W_i = 1/S^2_{Y_i}$.

Npr. čest slučaj eksponencijalne zavisnosti $y = a e^{bx}$ se linearizuje smenom:

$$\underbrace{\ln y}_{Y} = \underbrace{\ln a}_{A} + \underbrace{b\,x}_{B \cdot X} \quad \text{tj. } Y = \ln y \quad i \quad S_{Y_i} = \frac{S_{y_i}}{y_i} \quad a \quad W_i = \frac{y_i^2}{S^2_{y_i}}.$$

(ne treba zaboraviti da se pritom transformišu i parametri i njihove greške – ovde je to samo a: $A = \ln a$ i $S_a = e^A S_A$. Detalje ćemo videti kasnije, na primerima).

• Sada već možemo reći da postoji bar tri razloga zašto se funkcije fituju kroz eksp. tačke:

① Da se odrede brojne vrednosti parametara merene funk. zavisnosti, sa greškama, što i čini treći, parametarski način za merenje fiz. v-na

② Da se odredi tip funkcionalne zavisnosti između merenih veličina – što je moguće samo analizom v-sti χ^2, koja može biti neprihvatljivo velika zbog:

a) Potcenjenih statističkih grešaka S_{y_i} (ima i drugih fluktuacija)
b) Nekompenzovanih sistematskih grešaka u nekim tačkama
c) Lošeg tipa funkcije (zakon je drugačiji od pretpostavljenog)
d) Ko zna kakvih drugih razloga!

③ Da se odredi (izračuna) neka veličina koja je funkcija parametara fitovane f-je, (npr. integral spektralne linije, itd) u šta spada i određivanje – predviđanje v-sti funkcije u tačkama gde nije ili gde ne može biti merena (inter i ekstra-polacija u labavom smislu reči), kao i da se odredi greška (sigurnost) ovog predviđanja. Ovom trećem razlogu posvećujemo nastavak izlaganja:

• Greška veličine koja je računata iz parametara fita:

Posmatramo samo dvoparametarski opšti slučaj $Y = Y(p_1, p_2)$ kada potpuna propagacija grešaka parametara za grešku Y daje (str. 72):

$$S_Y^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial p_1}\right)^2 S_{p_1}^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial p_2}\right)^2 S_{p_2}^2 + 2\frac{\partial Y}{\partial p_1}\frac{\partial Y}{\partial p_2} S_{p_1 p_2}$$

gde je $S_{p_1 p_2}$ kovarijansa p_1 i p_2. Otud je za račun ove greške potrebno poznavanje cele matrice grešaka. Dakle, da bi rezultat našeg dvoparametarskog fita bio u potpunosti upotrebljiv pored

"Naučili smo kako je lako uveriti sebe da efekt postoji" – Komentar po pitanju "hladne fuzije", Nature 1989

① Vrednosti parametara sa greškama (četiri veličine za dvoparametarsku f-ju) treba citirati i

② Kovarijansu (ili korelacioni koef.) parametara (jedna veličina za dvopar. f-ju) ali i

③ Vrednost χ^2, da bi se imala predstava o kvalitetu fita, odnosno o veličinama eksternih grešaka,

što čini ukupno 6 veličina. Da bismo videli šta je kovarijansa parametara posmatrajmo grešku vrednosti fitovane funkcije f u nekoj tački x. Tada je

$$f(x; x_i, y_i) = a(x_i, y_i) + b(x_i, y_i) \cdot x$$

pa je, pošto samo y_i imaju greške, s_{y_i}, koje nisu korelirane:

$$s_f^2 = \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)^2 s_{y_i}^2$$

što uz:

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{\partial a}{\partial y_i} + x\frac{\partial b}{\partial y_i}$$

daje:

$$s_f^2 = \sum\left(\frac{\partial a}{\partial y_i} + x\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2 s_{y_i}^2 = \underbrace{\sum\left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 s_{y_i}^2}_{s_a^2 = \frac{\sum wx^2}{\Delta}} + x^2\underbrace{\sum\left(\frac{\partial b}{\partial y_i}\right)^2 s_{y_i}^2}_{s_b^2 = \frac{\sum w}{\Delta}} + 2x\underbrace{\sum \frac{\partial a}{\partial y_i}\frac{\partial b}{\partial y_i} s_{y_i}^2}$$

$$= s_a^2 + x^2 s_b^2 + 2x\, s_{ab}$$

$$\sum \underbrace{\frac{\partial a}{\partial y_i} s_{y_i}}_{\Delta a_i} \underbrace{\frac{\partial b}{\partial y_i} s_{y_i}}_{\Delta b_i} =$$

u konačnim priraštajima $\rightarrow \Delta a_i \quad \Delta b_i$

$= \sum \Delta a_i \Delta b_i = \mathrm{cov}(a,b) = s_{ab}$, što je izraz za kovarijansu par. a i b.

Kako smo potrebne izvode već našli (str. 73) posle malo <u>algebre</u> nalazimo da je

$$\boxed{s_{ab} = -\frac{\sum wx}{\Delta}}$$

i konačno:

$$s_f(x) = \pm\sqrt{s_a^2 + x^2 s_b^2 + 2x s_{ab}} = \boxed{\pm\sqrt{\frac{1}{\Delta}\left\{x^2\sum w - 2x\sum wx + \sum wx^2\right\}}} \quad (**)$$

NB: Ovo smo mogli dobiti i direktnom primenom opšteg izraza: za $f(x) = a + bx$:

$$s_f^2(x) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2}_{1} s_a^2 + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2}_{x} s_b^2 + 2\underbrace{\frac{\partial f}{\partial a}}_{1}\underbrace{\frac{\partial f}{\partial b}}_{x} s_{ab} = s_a^2 + x^2 s_b^2 + 2x\, s_{ab}.$$

Prodiskutujmo ove izraze.

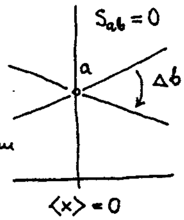
- Kao prvo, vidimo da u zavisnosti od znaka $\sum wx$, tj. x koordinate težišta polja rezultata $\langle x\rangle = \sum wx / \sum w$ (Δ je uvek pozitivno) zavisi i znak kovarijanse

NB: $\exists$ grešku (**) bi bilo korektno množiti sa $t_{n-2,CL}$ (v. marginu str. 73) te da su za $\langle x\rangle = 0$ a i b nekorelirani

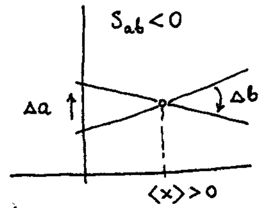
za $\langle x\rangle > 0$ antikorelirani

i za $\langle x\rangle < 0$ korelirani, pri čemu je smisao korelacije parametara,

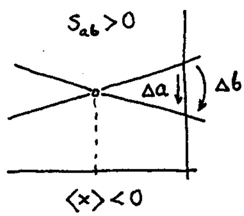
pošto fitovana prava uvek prolazi kroz $(\langle x\rangle, \langle y\rangle)$, jasan sa slika:



promena b ne uzrokuje promenu a, a i b su nekorelirani



promena b u jednom smeru uzrokuje promenu a u drugom, a i b su antikorelirani



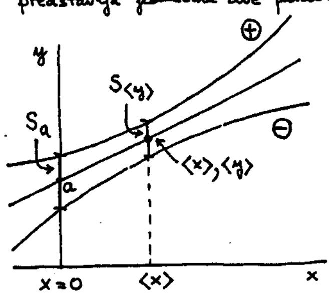
promena b uzrokuje istosmernu promenu a, a i b su korelirani

No, korelacija parametara nije invarijanta u odnosu na transformaciju koordinata. Očigledno je, naprimer, da smena $x' = x - \langle x\rangle$ sa $\langle x'\rangle = 0$ ukida korelaciju parametara.

- Izraz za grešku vrednosti koje daje fitovana funkcija

$$S_f(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{\Delta}\left\{x^2\sum w - 2x\sum wx + \sum wx^2\right\}} = \pm\sqrt{\frac{1}{\sum w}\,\frac{x^2 - 2x\langle x\rangle + \langle x^2\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}}$$

predstavlja jednačinu dve parabole (+ i − grane) oko fitovane prave linije koje definišu



tzv. koridor greške, sa temenom, tj. najmanjom greškom, u $x = \langle x\rangle$; $S_f(\langle x\rangle) = \frac{1}{\sqrt{\sum w}}$, što je jednako internoj grešci "srednje vrednosti svih y_i-ova", tj. y koordinate polja rezultata $\langle y\rangle$, $S_{\langle y\rangle}$. Vidi se da je $S_f(x)$ interna (apriorna) greška fitovane f-je te da množenje ove v-sti sa $\sqrt{\chi^2}$ daje eksternu grešku. Greška u $x = 0$, $S_f(0) = \sqrt{\frac{\sum wx^2}{\Delta}} = S_a$, jednaka je, kao što je i red, grešci odsečka na y osi. Takođe, i greška S_f, kao i greške parametara, raste kada su težine tačaka male, kada ima malo tačaka i kada je "disperzija" od x mala. Što se više udaljavamo od težišta polja rezultata greške funkcije su sve veće, što reflektuje opšti stav da su ekstrapolacije tim nepouzdanije što su dalje od oblasti u kojima je pojava upoznata merenjem. Na ovo rasilaženje koridora greške, jasno, utiče veličina greške nagiba, S_b.

Sada ćemo razmotriti dva specijalna slučaja fitovanja: tzv. ekvitežinski i neotežinjeni fit, a u okviru toga ćemo videti kako se eventualno mogu tretirati i sistematske greške u parametarskom merenju.

Kad bacaš kamenčiće u vodu posmatraj krugove koje obrazuju, inače će to bacanje biti puka razonoda. Kozma Prutkov

• Ekvitežinski fit je onaj u kome su sve greške y_i-ova, a time i težine, iste i poznate. Neka je $w_i = c = 1/s_y^2$. Tada izrazi za $a, b, s_a, s_b, s_{ab}, s_f$ i χ^2 (uz $\sum_1^n w_i = cn$) postaju:

$$a = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \sum xy}{\underbrace{n\sum x^2 - (\sum x)^2}_{} = \Delta}, \quad b = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{\Delta}$$

$$s_a = \sqrt{\frac{1}{c}\frac{\sum x^2}{\Delta}} = s_y\sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}}, \quad s_b = s_y\sqrt{\frac{n}{\Delta}} = s_y\underbrace{\sqrt{\frac{1}{n}\frac{1}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}}}$$

⇒ tim je manje što:
1. Su manje greške s_y
2. Ima više tačaka n
3. Je veći interval za x

$$s_{ab} = -s_y^2\frac{\sum x}{\Delta}$$

$$s_f = \pm s_y\sqrt{\frac{1}{\Delta}\left\{n x^2 - 2x\sum x + \sum x^2\right\}}$$

i

$$S = \sum_1^n w_i (y_i - f_i)^2 = \sum \frac{(y_i - f_i)^2}{s_y^2} = \frac{1}{s_y^2}\sum_1^n (y_i - f_i)^2$$
$$= \frac{1}{s_y^2}\left\{\sum y^2 - a\sum y - b\sum xy\right\}$$

Ekvitežinski fit je isto što i svaki otežinjeni fit, samo su izrazi jednostavniji, i u tom smislu je potpuno validan, sa standardnim interpretacijama grešaka i kvaliteta fita.

• Neotežinjeni fit smo prinuđeni da radimo kada ne znamo greške y-a, pa time ni težine tačaka, što je ekvivalentno poznavanju implicitnih sistematskih grešaka. U neotežinjenom fitu sve su težine formalno jednake jedinici te važe ni gornji izrazi za ekvitežinski fit, sa $c = s_y = 1$. To znači da sada minimiziramo:

$$\chi^2_{neotež} = \frac{1}{n-p}\sum_1^n (y_i - f_i)^2$$

tj. zbir kvadrata apsolutnih razlika merenih i fitovanih vrednosti, a ne zbir kvadrata tih razlika izraženih u jedinicama grešaka merenih v-sti, kao u otežinjenom fitu. Na taj način χ^2 sada nema nikakvu očekivanu vrednost jer razlike i u minimiziranoj sumi mogu da budu proizvoljne, a time ne postoji ni kriterijum kvaliteta fita. Još gore, sada ni greške parametara nemaju jasnu interpretaciju. Jedina mogućnost da takav fit učinimo upotrebljivim je da ga proglasimo dobrim, tj. da smatramo da su greške y-a, koje ne znamo, takve da daju $\chi^2 = 1$, tj. da je:

$$\chi^2 = \frac{1}{n-p}\sum\frac{(y_i - f_i)^2}{s_y^2} = \frac{1}{s_y^2}\frac{1}{n-p}\sum (y_i - f_i)^2 = \frac{\chi^2_{neotež}}{s_y^2} = 1,$$

"Ne postoji nacionalna nauka baš kao što ne postoji nacionalna tablica množenja; ono što je nacionalno više nije nauka"
A. P. Čehov

odnosno da su te nepoznate slučajne greške y-a jednake:

$$S_y = \sqrt{\chi^2_{\text{neotež}}} = \sqrt{\frac{1}{m-p}\sum_{1}^{m}(y_i - f_i)^2}\ ,$$

tj. da su sve greške y-a jednake rms vrednosti odstupanja funkcije od merenih v-sti. Ako sada u gornjim izrazima za ekvitežinski fit koristimo ovo S_y, gde već kako treba, time ceo slučaj svodimo na uobičajenu interpretaciju (osim što kriterijum kvaliteta fita gubi smisao). Ova procedura u izvesnom smislu predstavlja varijantu randomizacije sistematskih grešaka i otprilike je jedini način da osmislimo fit kroz podatke koji imaju samo sistematske greške.

Time smo iscrpli praktično sve što smo nameravali da kažemo o obradi rezultata u svim principijelno različitim načinima merenja (u statičkom režimu).

• Elementarni primer za različite načine prikazivanja i fitovanja funkc. zav.:

U klasičnoj studentskoj vežbi ispitivanja zavisnosti perioda oscilovanja (malim amplitudama) prostog klatna od njegove dužine moguće je posmatrati:

T vs $\sqrt{\ell}$	① $\underbrace{T}_{Y} = \underbrace{\emptyset}_{A} + \underbrace{k\sqrt{\ell}}_{BX}$	radi određivanja k, tj. g, sa greškom	može ekvitežinski pa i neotežinjeno, ali za interpretaciju grešaka i χ^2 treba $W_i = 1/(\Delta T)^2$ ne $W_i = 1$!
	② $\underbrace{T}_{Y} = \underbrace{C}_{A} + \underbrace{k\sqrt{\ell}}_{BX}$	za kontrolu sistematskih grešaka, $A \pm S_A$ treba da obuhvati nulu	
T^2 vs ℓ	③ $\underbrace{T^2}_{Y} = \underbrace{k\ell}_{BX}$	isto kao pod ① samo malo drugačije	sada, zbog nelinearne smene y, mora otežinjeno
$\ln T$ vs $\ln \ell$	④ $T = 2\pi(\ell/g)^s$ tj. $\underbrace{\ln T}_{Y} = \underbrace{k}_{A} + \underbrace{s \ln \ell}_{BX}$	za proveru stepena u zavisnosti, tj. da li $B \pm S_B$ obuhvata $1/2$.	mora otežinjeni fit

NB: Uvek vredi probati merenje i sa velikim amplitudama na kome treba pogledati kako se to odražava na fit!

• Fit prave linije kroz eksperimentalne tačke kada i nezavisna i zavisna promenljiva imaju greške opisan je u:

– J. H. Williamson, Can. J. Phys. 46 (1968) 1895 i

– D.R. Barker and L.M. Diane, Am. J. Phys. 42 (1974) 224

a v. i UT #40.

"Budućnost se predskazuje statistički a rekonstrukcija prošlosti je nemoguća", O. Costa de Beauregard

„U stvarnosti je svaka rekonstrukcija prošlosti u suštini zasnovana na fiziološkom pamćenju", O. C. de Beauregard

- Primer neotežinjenog fita koji se brzo i lako radi "peške" ili još brže scientific calculator-om koji ima LR ili SD2 program.

I. Peške: Napravi se tabela:

x	y	①: $y = a + bx$	② = ①$\cdot x$: $xy = xa + bx^2$	y^2	$f = a + bx$	$(y-f)^2$
1	10	$10 = a + b$	$10 = a + b$	100	8.33	2.77
2	15	$15 = a + 2b$	$30 = 2a + 4b$	225	18.33	11.11
3	30	$30 = a + 3b$	$90 = 3a + 9b$	900	28.33	2.77
	$A = \Sigma$:	$55 = 3a + 6b$	$B = \Sigma$: $130 = 6a + 14b$	1225		16.6

mereni podaci

$$\underset{\Sigma y}{55} = \underset{n}{3}a + \underset{\Sigma x}{6}b \qquad \underset{\Sigma xy}{130} = 6a + \underset{\Sigma x^2}{14}b \qquad \underset{\Sigma y^2}{1225} \qquad \underset{\Sigma (y-f)^2}{16.6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A: 3a + 6b = 55 \\ B: 6a + 14b = 130 \end{array}\right\} \Rightarrow a = \begin{vmatrix} 55 & 6 \\ 130 & 14 \end{vmatrix} \Big/ \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{vmatrix}}_{\Delta = 6} = -1.6\dot{6}$$

$$b = \begin{vmatrix} 3 & 55 \\ 6 & 130 \end{vmatrix} \Big/ \Delta = 10.0$$

što se ovde dobro slaže!

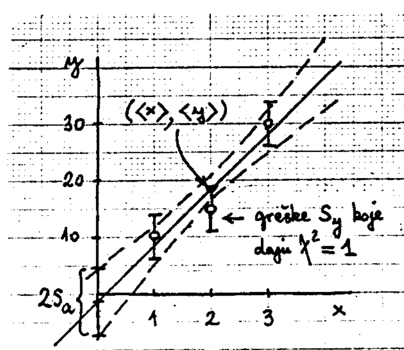
$$S_a = S_y \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{\Delta}} = 1.53\, S_y \qquad \chi^2_n = \frac{1}{3-2}\left\{\Sigma y^2 - a\Sigma y - b\Sigma xy\right\} = 16.\dot{6}$$

$$S_b = S_y \sqrt{\frac{n}{\Delta}} = 0.71\, S_y \qquad \Rightarrow S_y = \sqrt{\chi^2_n} = 4.1$$

i $S_a \simeq 6$, $S_b \simeq 3$, tj.
na CL = 68% je
$a = -2(6)$ i $b = 10(3)$ i
koridor greške je:

$$S_f = \pm S_y \sqrt{\frac{1}{\Delta}\left\{n x^2 - 2x\Sigma x + \Sigma x^2\right\}}$$

$$= \pm \sqrt{8x^2 - 32x + 38}$$



II. Pomoću LR ili SD2 programa:

Kada smo govorili o koreliranim v-nama taj smo program koristili za nalaženje sr. v-sti, stand. dev. i korel. koef. dva niza brojeva. No osim toga program ta dva niza brojeva shvata kao koordinate tačaka x, y kroz koje neotežinjeno fituje pravu liniju (o linearnoj regresiji v. Dodatak # 5) te se po unošenju podataka parametri te prave dobijaju pozivanjem na odgovarajuće tastere. Pozivom se takođe dobijaju i vrednosti za n, Σx, Σy, Σx^2, Σy^2, Σxy i $\langle x\rangle$ i $\langle y\rangle$ tj. sve vrednosti potrebne za račun grešaka parametara, koridora grešaka i χ^2, odnosno S_y (i to numerički stabilno!). Time nam ovaj program štedi celokupni gornji račun! Ovom prilikom nas, međutim, standardve devijacije i korelacioni koeficijent ova dva niza brojeva uopšte ne interesuju jer i nemaju nikakvog smisla (razlika je u tome što smo ranije posmatrali polje rezultata ponovljenih merenja u istom stanju sistema, kada nas je interesovalo $\langle x\rangle, \langle y\rangle, \sigma_x, \sigma_y, \rho_{xy}$, a sada posmatramo polje rezultata merenih u različitim stanjima sistema, koja su povezana funkcionalnom zavisnošću čije parametre želimo da odredimo (raniji slučaj odgovara posmatranju samo jedne tačke u sadašnjem slučaju!)).

Program je, jasno, na isti način upotrebljiv za svaki ekviteţinski fit prave linije!

- Primer koji demonstrira sve osobenosti fita prave linije kroz linearizovane podatke:

Neka je zavisnost $y(x)$ merena u četiri tačke (četiri stanja sistema) pri čemu v-ke y imaju standardne greške S_y i neka se zna da je $y(x) = \dfrac{a}{b+x^2}$ ⇒

$$\frac{1}{y} = \frac{b}{a} + \frac{1}{a}x^2$$
$$Y = A + B\cdot X$$
$$S_Y = \frac{\partial Y}{\partial y} S_y = -\frac{S_y}{y^2}$$

izvorni podaci	x	0	1	2	3	
	y	2.10	0.90	0.35	0.21	
	S_y	0.05	0.05	0.05	0.05	
linearizovani podaci	$X=x^2$	0	1	4	9	
	$Y=1/y$	0.4762	1.1111	2.857	4.762	
	$S_Y=S_y/y^2$	0.01134	0.06173	0.4082	1.1338	
	$W_i=1/S_Y^2$	7776.3	262.4	6.002	0.778	$\sum W = 8045.5$
	WX	0	262.4	24.0	7.0	$\sum WX = 293.4$
	WX^2	0	262.4	96.0	63.0	$\sum WX^2 = 421.4$
	WY	3703	291.6	17.14	3.7	$\sum WY = 4015.4$
	WXY	0	291.6	68.56	33.3	$\sum WXY = 393.5$
	WY^2	1763.4	324.0	48.97	17.62	$\sum WY^2 = 2154$
	$F=A+BX$	0.4771	1.0791	2.8851	5.8951	
	$W(Y-F)^2$	0.0063	0.269	0.0047	0.999	$\sum W(Y-F)^2 = 1.279$

$$\chi^2 = \frac{1}{n-p}\sum W(Y-F)^2 = 0.639$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sum WX^2 \sum WY - \sum WX \sum WXY}{\sum W \sum WX^2 - (\sum WX)^2} = \frac{1\,576\,637}{3\,304\,290 = \Delta} = 0.4771$$

$$B = \frac{\sum W \sum WXY - \sum WX \sum WY}{\Delta} = \frac{1\,987\,786}{\Delta} = 0.602$$

$$S_A = \sqrt{\frac{\sum WX^2}{\Delta}} = 0.0113 \qquad S_B = \sqrt{\frac{\sum W}{\Delta}} = 0.0493$$

$$\chi^2 = \frac{1}{n-p}\left\{\sum WY^2 - A\sum WY - B\sum WXY\right\} = \frac{1.336}{2} = 0.682$$

Numerički nestabilan!

Kada je brzina čestice jednom bliska c (za elektrone to je već na nekoliko MeV) akceleratori praktično više ne ubrzavaju - bolje ih je zvati "energizatorima" ili čak i "oteživačima" čestica.

⇒ Transformacija nazad u originalnu f-ju:

$$a = \frac{1}{B} = 1.661 \qquad b = \frac{A}{B} = 0.793$$

$$\frac{S_a}{a} = \frac{S_B}{B} \Rightarrow S_a = 0.136 \quad \Rightarrow a = 1.7(2)$$

ali: $$S_b = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial A}\right)^2 S_A^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial B}\right)^2 S_B^2 + 2\frac{\partial b}{\partial A}\frac{\partial b}{\partial B} S_{AB}} = \sqrt{\frac{S_A^2}{B^2} + \frac{A^2}{B^4} S_B^2 + 2\frac{A}{B^3} S_{AB}} \Big/ : b \Rightarrow$$

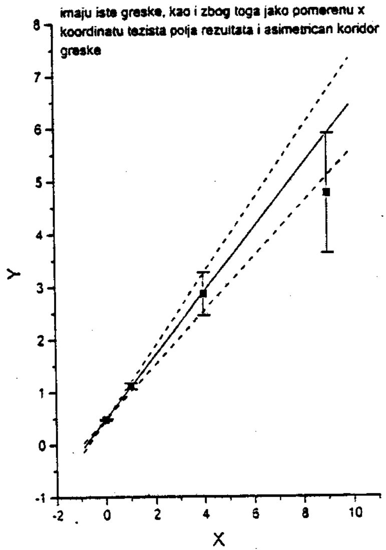
$$\frac{S_b}{b} = \sqrt{\left(\frac{S_A}{A}\right)^2 + \left(\frac{S_B}{B}\right)^2 - 2\frac{S_{AB}}{AB}}$$ za šta nam je potrebno i $S_{AB} = -\frac{\sum wX}{\Delta} = -8.88e\text{-}5$

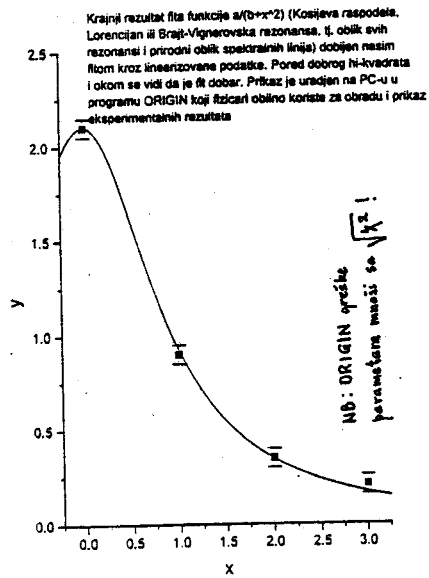
pa je $S_b = 0.07$ i $b = 0.79(7)$

Koridor greške za Y sada lako nalazimo kao $S_Y = \sqrt{S_A^2 + X^2 S_B^2 + 2X S_{AB}}$

a za y kao $S_y = y^2 S_Y$ (uočite položaj minimalne greške u koridoru!).

Sve greške su na $CL = 68\%$ a mogu se prikazati i na bilo kom drugom CL.





Već ni linearni fit višeparametarskih funkcija nije moguće raditi bez računara a topogotovo važi za fitovanje funkcija koje se ne mogu linearizovati te zahtevaju još složenije iterativne procedure. BASIC program #6 je primer jednog takvog univerzalnog programa kojim se može fitovati proizvoljna funkcija sa proizvoljnim brojem parametara. Uputstvo za rad sa programom i objašnjenje algoritma dati su na str. 165.

"Da sam čekao da išta uradim savršeno nikad ništa ne bih uradio" Bog

(30) INTERPOLACIJA I EKSTRAPOLACIJA: Oba termina koriste se u strogom i u labavom smislu.

(1) U strogom smislu podrazumeva nalaženje vrednosti funkcije između ili van njenih tačno poznatih vrednosti, što znači da se funkcija provlači tačno kroz poznate tačke. Može se raditi grafički i numerički (kada odgovara provlačenju funkcije sa onoliko parametara kroz koliko tačaka se provlači). Linearna interpolacija kroz dve tačke je:

$$\boxed{y = y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_2 - x)}$$

a kvadratna (parabolična) kroz tri tačke:

$$\boxed{y = y_2 + \frac{x - x_2}{x_3 - x_1}\left\{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x) + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}(x - x_1)\right\}}$$

U strogom smislu se, dakle, interpolacijom, funkcija od n parametara provlači kroz n tačaka. Tako se interpoliraju (i samo izuzetno i uz krajnju rezervu i ekstrapoliraju) samo teorijski (tablični) rezultati.

(2) Eksperimentalni rezultati interpoliraju se samo u labavom smislu reči, tj. po funkcijama koje su "kroz" eksp. tačke povučene metodom najmanjih kvadrata (grafički ili numerički), dakle, ne gornjim interpolacionim izrazima (funkcija od n parametara provlači se kroz N tačaka, $N > n$).
Ekstrapolacija eksp. rezultata je, kao i svaka generalizacija, krajnje opasna i ne radi se gotovo nikad, osim uz jaku teorijsku argumentaciju.

(31) USAGLAŠAVANJE EKSPERIMENTALNIH REZULTATA:

Do potrebe za usaglašavanjem eksp. rezultata dolazi uvek kada imamo više eksperimentalnih podataka nego samih veličina i relacija među njima. Ovo je u fizici najizraženije kod praktično najvažnijeg zadatka nalaženja skupa vrednosti univerzalnih fizičkih konstanti koji treba da na najbolji mogući način zadovolji ceo "univerzum" postojeće eksperimentalne fizike (ali i teorijske, koja obezbeđuje relacije između njih) (v. LIT # (15)). Odmah vidimo da je to u principu ista situacija kao kod nalaženja parametara funkcije koji je na najbolji način provlače kroz broj eksperimentalno rasutih tačaka veći od broja tih parametara. Na taj način metod najmanjih kvadrata možemo praktično direktno da primenimo i ovde. Kod samih merenja potreba za ovim se javlja uvek kada je sistem preodređen (to je čest slučaj u astronomiji i geodeziji, pri triangulaciji, i slično). I ovde se neegzaktnost (rastur) rezultata nadoknađuje njihovim brojem!

(32) KOMPJUTERI U EKSPERIMENTU:

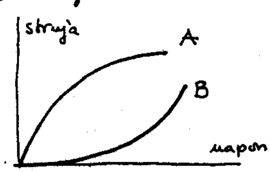
Pošto ova tema u današnje vreme zahteva čitav kurs to ćemo joj posvetiti najmanje pažnje. Računari se u eksperimentima koriste na dva bitno različita načina (1) "on-line", kada se nalaze u direktnoj sprezi sa eksperimentalnim uređajem i vrše prikupljanje podataka, njihovu obradu "u realnom vremenu", kontrolu i promenu uslova - dakle kada praktično mogu da automatizuju eksperiment u potpunosti i (2) "off-line", kada nisu u direktnoj vezi sa eksperimentom već služe za obradu već prikupljenih rezultata. Programi koje mi dajemo u dodatku namenjeni su radu "off-line". Korišćenje računara je, u svakom slučaju, dovelo do prave revolucije u eksperimentalnoj fizici omogućivši i same eksperimente i vrste obrade rezultata koje su ranije jednostavno bile nezamislive. Pa i u inače trivijalnim situacijama ogromna ušteda vremena ostavlja više prostora za kreativnost

Priroda sama odbacuje rezultate svojih neuspelih eksperimenata.

Dodatak # 9: MISCELLANEA (Zadaci, Pitanja, Problemi, Primeri, Procene, Zanimljivosti, Priručnički materijal ...)

M1 "BRZA PITANJA" sa usmenih ispita koja podstiču razvoj osećanja za redove veličina, kao jedini kriterijum za kontrolu ispravnosti dobijenog rezultata tj. za eliminaciju "ličnih grešaka" pri obradi rezultata merenja.

1. Procenite vrednost gravitacione konstante na osnovu gravitacionog ubrzanja
2. Koji efekti struje mogu da se koriste za njeno merenje u kojim opsezima vrednosti?
3. Kolika je brzina rasta ljudske kose? Koliko se atoma organizuje na mesto u jednoj dlaci u svakoj sekundi?
4. Gustina tečnog azota određuje se iz merenja težine mesingane kocke u tečnosti. Kolika se greška čini ako se zapremina mesinga računa iz merenja na sobnoj temperaturi? Linearni koef. širenja mesinga je $\sim 10^{-5}/°C$.
5. Ako udarite čoveka sa 10 džula da li ćete ga povrediti?
6. Opišite faktore koji određuju graničnu visinu planina na Zemlji.
7. Koja kriva, A ili B, predstavlja zavisnost struje od napona za malu sijalicu džepne lampe?



8. Kako biste izmerili da li elektroni zaista skreću u gravitacionom polju onoliko koliko se predviđa?
9. Koja zavisnost $y=f(x)$ može da zadovolji koji od ova dva slučaja:

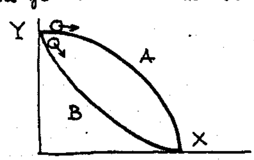
a)

x	5	22	39	56	75
y	3.1(3)	4.0(3)	2.2(3)	1.5(3)	3.2(3)

b)

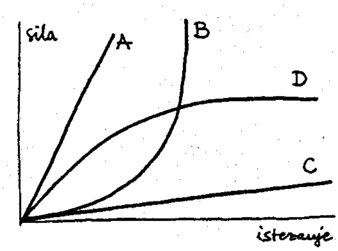
x	5	22	39	56	75
y	3.1(10)	4.0(10)	2.2(10)	1.5(10)	3.2(10)

10. Ako zagrejemo dve gvozdene kugle, od kojih je jedna dvostruko teža od druge, do iste temperature – koja će se pre ohladiti do sobne temperature?
11. Šta je vreme i kako se ono meri?
12.



Ako kuglica kreće iz Y iz mira kojim će putem pre stići do X?

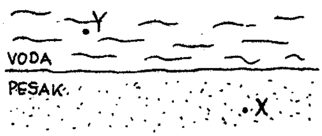
13. Koji čajnik duže drži toplo – manji ili veći?
14. Ako bi se svo stanovništvo Zemlje spojilo u jednu sferu, koliki bi bio njen radijus?
15. Koliko zrna soli ima u jednom slaniku?
16. Kako biste osećali pod rukom da vučete žice A, B, C ili D ako su im zavisnosti istezanja od sile kao na slici:



17. Koliko različitih načina možete da smislite za merenje visine tornja?
18. Projektujte instrument za merenje ubrzanja voza ako ste u njemu. A ako niste?
19. Predstavite na brojnoj osi sledeće eksperimentalne rezultate: 5; 5.0; 5.00

NB: Većina procena slaže se da je čovečanstvo do sada potrošilo ukupno ne više od 30 tona energije!

19. Vi ste u X i treba da spasete davljenika u Y. Ako trčite tri puta brže no što plivate kojim ćete putem do Y? A ako trčite i plivate istom brzinom? A ako trčite mnogo, mnogo brže no što plivate?



20. Čelična šipka ima kvadratni presek strane 5 mm. Ako je dugačka 1 m kolika je sila potrebna da je istegne za 1 mm. Jungov modul je $2 \times 10^{11}\,N/m^2$.

21. Koliko različitih metoda za merenje električnog otpora možete da smislite?

22. Kako biste odredili brzinu kojom tenis lopta napušta reket?

23. Kolika je talasna dužina u vazduhu zvuka učestanosti 256 Hz? A u vodi? A EM zračenja iste učestanosti?

24. Čelični lenjir je kalibrisan na 20°C. Koliko mu se kvari tačnost ako se koristi na 40°C? Linearni koef. širenja je $\sim 10^{-5}/°C$.

25. Koliko raznih načina možete da smislite za merenje ubrzanja slobodnog pada?

26. Komentarišite probleme pri prenošenju el. energije na daljinu.

27. Otpornici od $R_1 = 100\,\Omega$ i $R_2 = 50\,\Omega$ tačnosti 5% vezuju se jednom redno a drugi put paralelno. Koliki je ekvivalentni otpor, sa greškom, u oba slučaja?

28. U pretpostavljenom odsustvu ispitivane pojave merena veličina ima vrednost X a u pretpostavljenom prisustvu pojave vrednost Y. Od čega zavisi da li ćemo smatrati da je postojanje pojave utvrđeno ili ne?

29. Otpornici od 100 i 5 Ω nominalne tačnosti 5% vezuju se redno. Prokomentarisati! A paralelno?

30. Kolika je masa autoputa Beograd - Niš? Kolika bi bila strana kocke sačinjene od svog tog materijala?

31. Zašto se za otporne termometre koristi platina?

32. Koliko načina možete da smislite za merenje debljine cigaret-papira?

33. Koliko cigala ima u Beogradu? Kolika bi bila strana pune kocke sačinjene od svih tih cigala?

34. Kolika je instalisana električna snaga u Beogradu?

35. Koliki deo mase Zemlje se nalazi u formi trenutno živih ljudi?

36. Šta je masa? Kako je sve merimo?

37. Da li je osetljivost klatna kao akcelerometra linearna?

38. Koliko stabilnih elementarnih čestica ima u Vama? A nestabilnih?

39. Koliko atoma sačinjava našu Zemlju?

40. Koja je univerzalna konstanta određena sa najmanjom tačnošću? Zašto?

41. Avogadrov broj iznosi $6{,}022\,137(4) \times 10^{23}\,mol^{-1}$. Da li možemo primetiti promenu od 10^{15} atoma u molu neke supstance?

42. Koliko košta džul el. energije iz suvog elementa u odnosu na džul el. energije iz mreže?

„Gorivo" je materija koja sama od sebe nije uspela da stigne do stanja minimalne potencijalne energije i čovek samo treba da joj u tome pomogne.

43. Deformacija koju mala kuglica proizvodi udarom o metalnu ploču je, u određenom opsegu vrednosti, proporcionalna šestom stepenu njene brzine. Odredite dimenzije konstante proporcionalnosti.

44. Uravnoteženi Vitstonov most za vrednost nepoznatog otpora daje $R_x = R_1 (R_3/R_2)$. Ako su otpori R_1, R_2, R_3 nominalne tačnosti 1% sa kolikom greškom je određen otpor R_x ? Zaključak ?

45. Šta je prostor ? Kako ga merimo ?

46. Brojevi u izrazu $Z = 303/(125 \cdot 3)$ su eksperimentalni rezultati sa implicitnom greškom. Koliko je Z ?

47. Kakav treba da bude oblik suda da se minimiziraju toplotni gubici ? Zapremina je fiksirana.

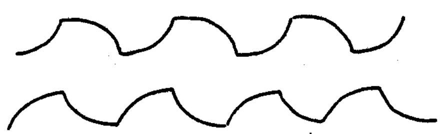
48. Možete li bez ikakvog računa odmah reći koji je izraz od ova tri za ekvivalentan otpor tri paralelno vezana otpornika tačan? Zašto ?

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}, \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 (R_2 + R_3)}$$

49. Opišite faktore koji utiču na vrstu materijala i dimenzije dalekovodnog kabla

50. Da li je zavisnost temperature termostatiranog prostora ovakva:

ili ovakva:



?

51. Električni otpornici projektuju se za datu snagu. Šta to znači ?

52. Koliki deo Vaše mase čine atomska jezgra ?

53. Kolika je Vaša ukupna vezivna energija, odnosno ukupni defekt mase ?

54. Koliko je povećanje potrebno da bi se videli detalji veličine mikrona ako oko razdvojeno vidi tačke koje su pod uglom većim od jednog lučnog minuta ?

55. Traži se zapremina vrlo dugačke šipke kružnog preseka. Da li je ispravno dužinu meriti merom trakom sa mm podelom a prečnik preseka mikrometrom. Zašto ?

56. Magnetofonska traka se premotava sa jednog kalema na drugi. Dokažite da je zbir kvadrata radijusa namotanih delova trake tokom celog namotavanja stalan, $R^2 + r^2 = const$. Za dva klubeta vune važi $R^3 + r^3 = const$. Zašto ?

57. Vrednost za e je 1929. godine bila $e = 4.7700 \times 10^{-10}$ esj što je kasnije promenjeno u $e = 4.80294 \times 10^{-10}$ esj. Prokomentarišite !

58. Procenite temperaturu vlakna sijalice od 100 W priključene na mrežni napon ako je otpor vlakna, kada se meri ommetrom jednak 35 Ω. Temp. koef. otpora volframa je $\alpha = 0.0046/°C$.

59. Indeks prelamanja pri prelazu iz sredine 1 u 2 je $n_{12} = C_1/C_2 = \lambda_1/\lambda_2$. Ako je u vazduhu $\lambda_1 = 650$ nm (crveno), gledano iz vode (sa $n_{12} = 1,33$), biće $\lambda_2 = \lambda_1 / n_{12} = 490$ nm (plavo). Da li je to tačno ?

60. Šta je sila ? Kako sve merimo sile ?

61. Iz kojih se tačaka Zemlja i Mesec vide pod istim uglom (prividno iste veličine) ?

62. Kako je Šaljapin glasom razbijao čaše ? Da li je za to potreban izvanredan sluh ?

u beskonačnoj vasioni ima beskonačno mnogo goriva - ili, bića koja znaju fiziku u stanju su da se beskonačno dugo opiru toplotnoj smrti vasione. To može biti i ultimativni "smisao" biološke evolucije..

(M2) ZADACI sa pismenih ispita, za uvežbavanje osnovnih postupaka u obradi rez. merenja i navikavanje na numeričku pedanteriju

0. Koeficijent viskoznosti, η, za tečnosti može se odrediti preko Poazejevog zakona:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi p r^4}{8 \ell \eta}$$

gde je dV/dt brzina protoka tečnosti pri stalnom gradijentu pritiska p kroz kapilaru dužine ℓ i radijusa r. η se može odrediti i poredjenjem vremena isticanja τ jednake količine tečnosti sa poznatim koeficijentom i merene tečnosti kroz istu kapilaru po relaciji:

$$\eta = \eta_0 \frac{\varrho \tau}{\varrho_0 \tau_0}$$

gde su indeksom "o" označene veličine koje se odnose na poznatu tečnost. Procenite koji od dva metoda može dati tačniji rezultat kao i na šta treba u jednom a na šta u drugom slučaju obratiti posebnu pažnju.

1. Strane pravougaonika merene su mernom trakom sa milimetarskom podelom. Rezultati su: a=926 mm i b=348 mm. Kolika je površina pravougaonika i njena greška? Šta ako je a=9 mm i b=3 mm? Uporediti i prokomentarisati.

2. Otpornik ima nominalnu vrednost od 10Ω sa deklarisanom tačnošću od 1%. Treba naći snagu disipiranu na otporniku kada kroz njega protiče struja I. Ona se može naći na tri načina:

a) $P=U^2/R$ b) $P=UI$ c) $P=RI^2$

gde je U pad napona na otporniku. Ako se struja i napon mere instrumentima klase tačnosti 2 (greške metoda mogu se zanemariti) na opsezima od 10 mA i 100 mV i ako su izmerene vrednosti I=9,2 mA i U=89,5 mV, kako ćemo najtačnije odrediti traženu snagu?

3. U Borovoj teoriji energija elektrona u atomu vodonika u n-tom kvantnom stanju je jednaka:

$$E_n = -\frac{1}{2}\frac{m e^4}{n^2 \hbar^2}$$

Ako su masa elektrona m i Plankova konstanta $\hbar$ poznati sa tačnošću od 0,1% a elementarno naelektrisanje e sa 0,2% kolika je tačnost poznavanja izračunate energije elektrona u stanju sa a)n=1 i b)n=10. Ako se želi povećanje ove tačnosti koju je veličinu najsvrsishodnije odrediti tačnije?

4. Termometar ima neobeleženu linearnu skalu sa 100 podelaka. Držanjem u smeši leda i vode (0°C) pokazivač instrumenta nalazi se na 14,5-om podeoku a držanjem u ključaloj vodi (100°C) na 33-ćem podeoku. Pretpostavljajući da je instrument linearan u celom opsegu, odrediti:
   a) osetljivost instrumenta (u °C/pod)
   b) tačnost instrumenta
   c) opseg instrumenta
   d) kolika temperatura odgovara 58-om podeoku i sa kojom greškom

Koliko bi se energije oslobodilo ako biste se susreli sa svojim anti-ja?

5 Ako na ploču od datog materijala debljine d upada snop zračenja intenziteta I_o nju će napustiti snop intenziteta

$$I = I_o \, 2^{-\frac{d}{d_{1/2}}}$$

gde je $d_{1/2}$ konstanta za dati materijal (takozvana poludebljina). Ako je poludebljina odredjena sa greškom od 10%, pa uzmemo ploču debljine $d=10d_{1/2}$, sa kolikom greškom ćemo predvideti intenzitet I koji će zračenje imati na izlasku iz ploče?

6. **Naći apsolutnu grešku Borovog radijusa**

$$a_o = \frac{4\pi\varepsilon_o \hbar^2}{me^2} = 5,2917 \times 10^{-11} \mathrm{m}$$

ako su greške relevantnih veličina sledeće:

$$\Delta\varepsilon_o/\varepsilon_o = 10^{-7}, \quad \Delta\hbar/\hbar = 10^{-4}, \quad \Delta m/m = 10^{-6}, \quad \Delta e/e = 5\times 10^{-5}.$$

7. Veličina Z je data funkcija nezavisno merenih veličina x i y. Naći vrednosti Z i njegove slučajne greške, u formi $Z \pm \Delta Z$, ako je x=10(1) i y=5(1):

a) $Z = x + 5y$ c) $Z = x^2y^3$

b) $Z = x - 2y$ d) $Z = x^2/y^3$

8. **Izvesna veličina merena je N puta odakle su nadjene njena srednja vrednost i standardna greška. Ako se želi da poveća preciznost rezultata dva puta koliko dodatnih merenja treba da se izvrši?**

9. **Period oscilacija klatna iznosi oko 0,5 s. Merenje ma kog intervala vremena datim hronometrom, po proceni, vrši se sa tačnošću od 0,2 s. Kolika je greška perioda klatna odredjenog na osnovu merenja trajanja 50 punih oscilacija, koje iznosi T=24,1 s? Prokomentarisati.**

10. **U sledećim slučajevima Z je data funkcija nezavisno merenih veličina A i B. Naći vrednosti Z i njegove sistematske greške u formi $Z \pm \Delta Z$ ako je $A=100\pm5$ i $B=45\pm5$:**

a) $Z=A^2$ d) $Z=AB^2$

b) $Z=A-2B$ e) $Z=A^2B$

c) $Z=A+2B$ f) $Z=A/B^2$ **Prokomentarisati!**

11. **Jačina fotostruje sa svojom statističkom greškom u osustvu ispitivane pojave iznosi $i_o=(2,1\pm0,1)x10^{-9}A$ a po uključenju pojave $i_1=(2,3\pm0,1)x10^{-9}A$. Šta se može reći o ovom eksperimentu?**

12. U jednom eksperimentu multiplikativni korekcioni faktor iznosi $k=a/(a-b)$ pri čemu su veličine a i b odredjene sa sistematskim greškama Δa i Δb. Koliku grešku unosi korekcija faktorom k?

13. **Ponovljena merenja detektorske struje (mA) dala su sledeće rezultate: 5,13; 5,06; 5,05; 5,09; 5,10. Izraziti rezultat na nivou poverenja od 95,4%.** Prokomentarišite!

14. Rezultat skupa merenja napona U(mV) prikazati na nivou poverenja 68%. Rezultati merenja su:

15.6	14.6
15.4	14.3
16.1	15.2
14.2	16.0
15.2	14.8

15. **Pritisak i zapremina gasa su iz ponovljenih merenja odredjeni sa standardnim greškama od po 10%. Kolika je standardna greška temperature odredjene na osnovu univerzalnog gasnog zakona (pV=const.T)?**

16. Naći srednju vrednost i standardnu grešku sledećih rezultata za brzinu svetlosti:

c_1 = 299 774(2) km/s
c_2 = 299 778(4) km/s
c_3 = 299 763(5) km/s

17. **Odredite žižnu daljinu bikonveksnog sočiva, f, sa greškom, ako su udaljenja predmeta i realnog lika sa odgovarajućim sistematskim greškama jednaka p=10.2(5)cm i l=3.8(3)cm (1/f = 1/p + 1/l).**

18. **Naći srednju vrednost i standardnu grešku sledećih nezavisnih rezultata za gravitacionu konstantu:**

$G_1=6,671(4)x10^{-11}m^3kg^{-1}s^{-2}$
$G_2=6,683(12)x10^{-11}$ -"-
$G_3=6,664(8)x10^{-11}$ -"-

19. Kolika je brzina tela koje se ravnomerno kreće ako su mereni položaji tela u odgovarajućim trenucima vremena jednaki:

t(s)	8	12	20
x(pod)	24	35	63

20. Istezanje jedne žice, $\Delta\ell$, mereno je u funkciji sile istezanja F. Rezultati su u tablici. Naći (numerički) koliko bi istezanje bilo za silu od 100 kN. Kakav je kvalitet ovog predvidjanja?

F(kN)	10	30	45	60
$\Delta\ell$ (mm)	0,75	1,9	2,5	4,0

21. Merena vremena potrebna da telo padne sa date visine data su u tablici. Numerički nadjite koeficijent pravca zavisnosti

$$h = h(t^2) = gt^2/2$$

tj. vrednost gravitacionog ubrzanja g.

h(m)	0,4	1,0	1,5
t(s)	0,28	0,46	0,54

22. Merena je zavisnost otpora provodnika od temperature u opsegu temperatura u kome se ova zavisnost može smatrati linearnom, oblika:

$$R(t) = R_0(1 + \alpha t)$$

Podaci su dati u tablici. Numerički naći linearni temperaturski koeficijent otpornosti α.

t(°C)	320	330	340	350
R(Ω)	2,25	2,26	2,28	2,35

23. Funkciju $y = p/3x + q$ linearizovati pa metodom najmanjih kvadrata odrediti vrednosti parametara p i q ako su izmereni sledeći parovi vrednosti:

x	0.22	0.07	0.046
y	3.1	4.1	4.8

24. Zavisnost elektromotorne sile termopara od razlike temperatura toplog i hladnog kraja za 5 parova vrednosti data je u tablici. Odredite numerički kojoj temperaturskoj razlici bi odgovarao napon od 1,5 mV.

Δt(°C)	0	10	20	30	40
V(mV)	0	0,41	0,79	1,22	1,58

(ime i prezime) (smer) (broj indexa)

Vreme rada 3 h. Dozvoljena upotreba svih pomagala. Korektno uradjeni zadatak donosi onoliko poena koliko piše uz broj zadatka. Za izlazak na usmeni deo ispita potrebno je bar 50 poena. Ovaj list popuniti ličnim podacima i predati ga uz zadatak. PISATI UREDNO I ČITKO!

1.(20%). Vrednosti direktno merenih veličina c, d i f prikazane sa njihovim sistematskim greškama su: $c = 2.25(5)$, $d = 1.55(5)$ i $f = 1.25(5)$. Naći vrednost indirektno merene veličine S koja je definisana kao $S = \left[3c/(5d - 2f^2)\right]^3$ i predstaviti je sa odgovarajućom sistematskom greškom..

2.(25%). Dve veličine u i v koje simultano opisuju stanje datog fizičkog sistema mere se četiri puta u odgovarajućim parovima, uvek pod istim uslovima (u istom stanju sistema). Četiri rezultata su:

u	3.4	3.1	3.1	3.3
v	4.1	4.1	4.3	4.2

Naći srednje vrednosti ovih veličina i prikazati ih sa odgovarajućim standardnim greškama. Takođe naći njihovu kovarijansu i korelacioni koeficijent. Naći i vrednost indirektno merene veličine $w = 3u/v$ i prikazati je na nivou poverenja od 68 %.

3.(20%). Tri rezultata za veličinu γ citirana sa standardnim greškama su:

$$\gamma_1 = 3.2459(6)\text{e-}21 \text{ T.m} , \quad \gamma_2 = 3.2437(3)\text{e-}21 \text{ T.m} , \quad \gamma_3 = 3.2446(3)\text{e-}21 \text{ T.m}$$

Naći njihovu otežinjenu srednju vrednost, internu i eksternu grešku ove srednje vrednosti i χ^2. Napisati konačni rezultat ispravno i obrazložiti Vaš izbor.

4.(35%). Dve veličine x i y koje simultano opisuju stanje datog fizičkog sistema merene su u odgovarajućim parovima u četiri različita stanja sistema. Stanje sistema je uvek definisano vrednošću nezavisne varijable x koja je poznata sa zanemarljivom greškom. Vrednosti zavisno promenljive y se u svakom od četiri stanja mere po više puta i ovde su citirane kao srednje vrednosti sa odgovarajućim standardnim greškama. Tako dobijena četiri para vrednosti su:

x	0.25	2.25	11.0	18.5
y	0.083(3)	0.053(3)	0.033(3)	0.026(3)

Ako je zavisnost y od x poznata i jednaka $y = 1/(a + bx^{1/2})$, koristeći metod najmanjih kvadrata naći vrednosti nepoznatih parametara a i b i napisati ih sa odgovarajućim standardnim greškama. Prokomentarisati kvalitet fita. Takodje naći i očekivanu vrednost za y u tački x = 6.25 i interval poverenja ove vrednosti na nivou poverenja od 68 %.

REŠENJA UGLEDNIH ZADATAKA:

(1.)
$$\left.\begin{aligned} c &= 2.25(5) \\ d &= 1.55(5) \\ f &= 1.25(5) \end{aligned}\right\} \quad S = \left[\frac{3c}{5d-2f^2}\right]^3 = 3.1086807$$

Tri moguće procedure za nalaženje sistematske greške indirektno merene veličine S su:

a) Svođenje na poznate tablične slučajeve propagacije sistematskih grešaka, recimo kao:

$$S = \left[\frac{3c}{5d-2f^2}\right]^3 = \frac{A^3}{B^3} \quad i \quad \frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta(A^3)}{A^3} + \frac{\Delta(B^3)}{B^3} = \frac{3A^2\Delta A}{A^3} + \frac{3B^2\Delta B}{B^3} = 3\left[\frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta A}{A} &= \frac{\Delta(3c)}{3c} = \frac{3\Delta c}{3c} = \frac{\Delta c}{c} = 0.0\dot{2} \\ \frac{\Delta B}{B} &= \frac{\Delta(5d-2f^2)}{5d-2f^2} = \frac{5\Delta d + 4f\Delta f}{5d-2f^2} = 0.1081 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\Delta S}{S} = 0.391 \quad i$$

$\Delta S = 1.21546 \simeq 1$ i

konačno $\boxed{S = 3 \pm 1}$

b) Korišćenje logaritamskog izvoda:

$$\log S = 3\left[\log 3 + \log c - \log(5d-2f^2)\right] \;/\cdot d \Rightarrow$$

$$\frac{dS}{S} = 3\left[\frac{dc}{c} - \frac{d(5d-2f^2)}{5d-2f^2}\right] \Rightarrow$$ Kada diferencijale zamenimo konačnim priraštajima (greškama) i zaokružene minuse pretvorimo u pluseve $\Rightarrow$

$$\frac{\Delta S}{S} = 3\left[\frac{\Delta c}{c} + \frac{5\Delta d + 2\cdot 2f\Delta f}{5d-2f^2}\right],$$ dobija se isto što i u gornjem načinu

c) Po definiciji propagacije sistematskih grešaka: Napišimo S kao: $S = 27c^3(5d-2f^2)^{-3}$.

$$\Rightarrow \Delta S = \left|\frac{\partial S}{\partial c}\right|\Delta c + \left|\frac{\partial S}{\partial d}\right|\Delta d + \left|\frac{\partial S}{\partial f}\right|\Delta f$$

Parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial S}{\partial c} = 27\cdot 3\cdot c^2\cdot(5d-2f^2)^{-3} = 4.145$$

$$\frac{\partial S}{\partial d} = 27c^3(-3)(5d-2f^2)^{-4}\cdot(5d-2f^2)'_d = 27c^3(-3)(5d-2f^2)^{-4}\cdot 5 = 10.0822$$

$$\frac{\partial S}{\partial f} = 27c^3(-3)(5d-2f^2)^{-4}\cdot(5d-2f^2)'_f = 27c^3(-3)(5d-2f^2)^{-4}\cdot(-2\cdot 2\cdot f) = 10.0822$$

i konačno:

$$\Delta S = 4.145 * 0.05 + 10.0822 * 0.05 + 10.0822 * 0.05 = 1.21547 \simeq 1$$

i $\boxed{S = 3(1)}$

NB: Preporučuje se provera rezultata radom na dva načina: pod a) ili b) i c).

(2)

i	u	v
1	3.4	4.1
2	3.1	4.1
3	3.1	4.3
4	3.3	4.2

$$\bar{u} = \frac{\sum_1^4 u_i}{4} = 3.225$$

$$\bar{v} = \frac{\sum_1^4 v_i}{4} = 4.175$$

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{1}{4-1}\sum_1^4 (\bar{u}-u_i)^2} = 0.15$$

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{4-1}\sum_1^4 (\bar{v}-v_i)^2} = 0.0957427$$

Alternativno, ovo se sve može dobiti na "scientific" kalkulatoru ili korišćenjem SD programa za odvojene nizove u i v ili SD2 (ili LR) programa za niz u, v parova vrednosti. Standardne greške za u i v su (uz korišćenje tablice za vrednosti Studentovog t, na str. 46)

$$S_u = t_{4,68}\cdot\sigma_u/\sqrt{4} = 1.2 * 0.15/2 = 0.09$$

$$S_v = t_{4,68}\cdot\sigma_v/\sqrt{4} = 1.2 * 0.09574/2 = 0.05744$$, pa je rezultat za u i v:

$$\boxed{u = 3.23(9)}$$
$$\boxed{v = 4.18(6)}$$

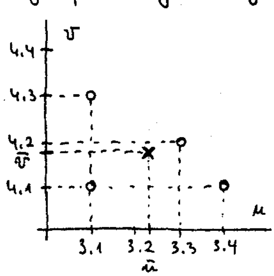
što su srednje vrednosti 4 merenja, sa standardnim greškama (tj. na nivou poverenja 68%).

Kovarijansa veličina u i v je:

$$\sigma_{uv} = \frac{1}{4-1}\sum_1^4 (u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v}) = -5.8\dot{3}\times 10^{-3}$$

a korelacioni koeficijent $\rho_{uv} = \dfrac{\sigma_{uv}}{\sigma_u\sigma_v} = -0.406$

(Alternativno korelacioni koef. se direktno može dobiti korišćenjem programa SD2 (ili LR)).
Inspekcija tablice značajnosti korelacionog koeficijenta (str. 54 skripata) pokazuje da postoji verovatnoća od oko 60% da $|\rho|$ bude 0.4 (ili veći) čak i ako dve veličine koje su merene 4 puta uopšte nisu korelirane, tj. da ova vrednost korel. koef. nije značajna i da je opravdano smatrati da je $\rho_{uv} \simeq 0$. Ovo nam indirektno potvrđuje i izgled polja rezultata čije fluktuacije i izgledaju nekorelirane:



Vrednost indirektno merene veličine w je

$$w = 3u/v = 2.317365$$

a njena standardna greška je:

$$S_w = \sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 S_u^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 S_v^2 + \cancelto{0}{2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\rho_{uv}S_u S_v}}$$

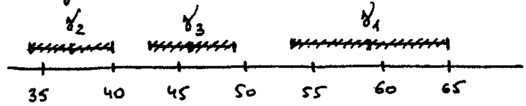
sa $\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{3}{v} = 0.71856$ i $\dfrac{\partial w}{\partial v} = -\dfrac{3u}{v^2} = -0.55505$

pa je $S_w = 0.0721039$ i konačno: $\boxed{w = 2.32(7)}$

iz 4 merenja, na nivou poverenja od 68%.

③ $\gamma_1 = 3.2459(6)\times10^{-21}$
$\gamma_2 = 3.2437(3)\times10^{-21}$
$\gamma_3 = 3.2446(3)\times10^{-21}$

što izgleda ovako:



Ovo izaziva sumnju da svi rezultati možda ne pripadaju istoj populaciji i da se usrednjavanje mora opravdati kvantitativnom analizom konzistencije rezultata.

Pošto su težine definisane do na konstantni množitelj i pošto nijedan sabirak ne sme da zavisi od sistema jedinica, da bi se pojednostavio račun početne podatke možemo svesti na:

$$\gamma_1 = 59(6) \qquad \gamma_2 = 37(3) \qquad \gamma_3 = 46(3)$$

ne zaboravljajući da konačni rezultat transformišemo u početnu formu.

Težine su:
$$w_1 = 1/6^2 \qquad w_2 = 1/3^2 \qquad w_3 = 1/3^2$$

pa je otežinjena srednja vrednost:
$$\bar{\gamma} = \frac{\sum_1^3 w_i\gamma_i}{\sum_1^3 w_i} = \frac{\frac{59}{36}+\frac{37}{9}+\frac{46}{9}}{\frac{1}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} = 43.\dot{4}$$

a interna (a priori) greška:
$$s_{int} = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^3 w_i}} = 2,$$
te se rezultat mora pisati kao:

$$\boxed{\bar{\gamma} = 3.2443(2)\times10^{-21}\ \mathrm{T\cdot m}}$$

(Za grubu proveru tačnosti računa sr. v-st treba da je između rezultata koji se usrednjavaju, i najbliža onom sa najmanjom greškom, a interna greška treba da je manja od najmanje od svih grešaka pojedinačnih rezultata).

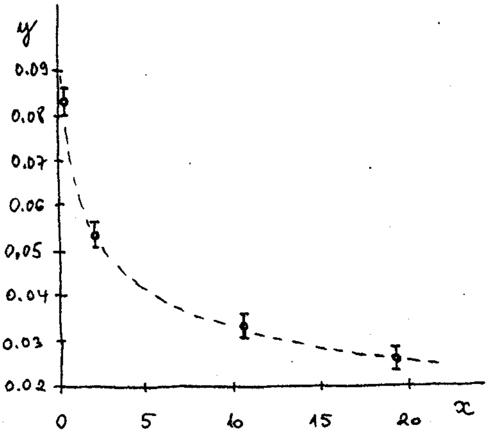
Ovako nađena sr. v-st će, međutim, biti ispravan predstavnik svih usrednjenih rezultata samo ako je skup tih rezultata konzistentan, odnosno ako stvarni rastur rezultata nije veći od onog koga dozvoljavaju citirane greške. Da se ovo kvantitativno utvrdi treba naći eksternu (a posteriori) grešku, tj. stvarnu disperziju početnih rezultata, i videti da li je po χ^2 testu dozvoljena i u skladu sa internom (a priori) greškom. ⇒

$$s_{ext} = \sqrt{\frac{\sum_1^3 w_i(\bar{\gamma}-\gamma_i)^2}{(m-1)\sum_1^3 w_i}} = 4.91$$

Odnos kvadrata eksterne i interne greške je χ^2 distribuiran: $\chi^2_{RED} = \frac{s^2_{ext}}{s^2_{int}} = \frac{4.91^2}{2^2} = 6$, što je normirani (redukovani) χ^2 a u tablicama χ^2 raspodele na str. 62. nalazi se ovaj umnožen sa $m-1$, tj. $\chi^2 = \chi^2_{RED}\cdot(m-1) \simeq 12$. U tablici vidimo da se za 3 merenja ovoliki χ^2 očekuje sa verovatnoćom nešto manjom od ~1% i kada je sve u redu, odnosno kada su podaci konzistentni. To se već smatra malo verovatnim pa time i značajnim odstupanjem od konzistentnosti te teško možemo prihvatiti da je ovoliki rastur rezultata (eksterna greška) dozvoljen greškama pojedinačnih rezultata (interna greška). Otud se smatra ili da se rezultati ne mogu usrednjavati ili da, ako se već usrednjavaju, greška srednje v-sti treba da se prikaže kao eksterna greška, što znači da se greška de facto kvari u odnosu na greške pojedinačnih rezultata, čime se smisao usrednjavanja dobrim delom gubi!

4.

x	0.25	2.25	11.0	18.5
y	0.083	0.053	0.033	0.026
S_y	0.003	0.003	0.003	0.003



Podaci izgledaju kao na slici i očigledno su nelinearni. Znajući da je zavisnost oblika

$$y = \frac{1}{a + b\sqrt{x}}$$

linearizacija u oblik $Y = A + BX$ može se izvesti smenama:

$$\frac{1}{y} = a + b\sqrt{x}$$

$$Y = A + B X, \quad Y = \frac{1}{y}, \; X = \sqrt{x}$$

Pošto se pritom transformišu i veličine koje imaju greške (y), moraju se transformisati i njihove greške jer su one osnova za nalaženje težina u linearnom fitu:

$$\Rightarrow S_Y = \left|\frac{\partial Y}{\partial y}\right| \cdot S_y = \frac{S_y}{y^2}$$

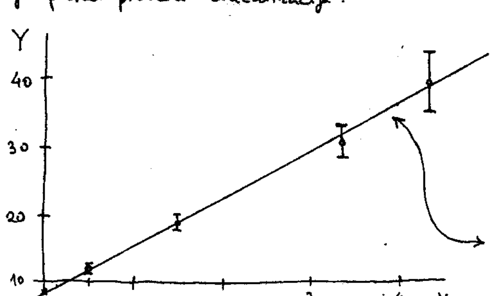
Relevantne veličine su u tablici:

x	0.25	2.25	11.0	18.5	
y	0.083	0.053	0.033	0.026	
S_y	0.003	0.003	0.003	0.003	
$X=\sqrt{x}$	0.5	1.5	3.3166	4.3011	
$Y=1/y$	12.048	18.868	30.303	38.461	
$S_Y = S_y/y^2$	0.43547	1.068	2.7548	4.4379	
$w = 1/S_Y^2$	5.27315	0.8767	0.1318	0.05077	$\Sigma w = 6.3326$
wX	2.6365	1.3150	0.4371	0.2184	$\Sigma wX = 4.607$
wY	63.531	16.541	3.994	1.953	$\Sigma wY = 86.02$
wXY	31.765	24.812	13.246	8.400	$\Sigma wXY = 78.22$
wX^2	1.3183	1.972	1.450	0.9393	$\Sigma wX^2 = 5.679$
wY^2	765.42	312.11	121.03	75.1	$\Sigma wY^2 = 1273.7$

$$\Rightarrow A = a = \frac{\Sigma wX^2 \Sigma wY - \Sigma wX \Sigma wXY}{\underbrace{\Sigma w \Sigma wX^2 - (\Sigma wX)^2}_{\Delta}} = \frac{128.134}{14.738} = 8.694$$

$$B = b = \frac{\Sigma w \Sigma wXY - \Sigma wX \Sigma wY}{\Delta} = \frac{99.06}{14.738} = 6.72$$

Grafička provera linearizacije:



$$\Delta A = \sqrt{\frac{\Sigma wX^2}{\Delta}} = 0.621$$

$$\Delta B = \sqrt{\frac{\Sigma w}{\Delta}} = 0.655 \Rightarrow \text{Konačno:}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 8.7(6) \quad B = 6.7(7)} \quad i$$

$$Y = 8.7 + 6.7 * X \quad tj. \quad y = \frac{1}{8.7 + 6.7\sqrt{x}}$$

Kvalitet fita kvantifikujemo veličinom

$$\chi^2_{RED} = \frac{1}{n-2}\sum_1^4 w_i\left(Y_i - Y_i^{fit}\right)^2 = \frac{1}{n-2}\left\{\sum wY^2 - A\sum wY - B\sum wXY\right\} = 0.05321$$

Pretvaranje u $\chi^2 = \chi^2_{RED}\cdot(n-2)$ i pogled u tablicu χ^2 raspodele na str. 62 govori da se ovo može smatrati vrlo dobrim fitom, što se jasno vidi i na grafičkom prikazu fitovane prave.

Interpolisana vrednost y u tački $x = 6.25$ je $y(6.25) = \frac{1}{8.7+6.7\sqrt{6.25}} = 0.03929$

a greška tog predviđanja na nivou poverenja 68% nalazi se prvo u linearizovanoj reprezentaciji za $Y(X=\sqrt{6.25}) = 25.45$ kao:

$$S_Y = \sqrt{\frac{1}{\Delta}\left\{X^2\sum w - 2X\sum wX + \sum wX^2\right\}} = 1.228$$

pa odatle nalazimo grešku predviđanja za $y(x=6.25)$ kao

$$S_y = y^2\cdot S_Y = 0.03929^2\cdot 1.228 = 0.00189$$ pa je konačno:

$$\boxed{y(x=6.25) = 0.039(2)}$$

● NB: Kada više ništa drugo ne pomaže pogledaj u HELP fajl ili MANUAL (Priručnik - uputstvo za upotrebu)!

● Sadržaj HELP fajla programa Microcal ORIGIN(TM) iz koga se može videti šta radi ovaj program koga fizičari rado koriste za obradu i prezentaciju svojih rezultata.

Contents