(1.) НЕСВОЈСТВЕНИ ИНТЕГРАЛ, ДЕФ., ОСОБИНЕ, ПОРЕЂБЕНИ КРИТЕРИЈУМИ.

ЦИЉ ЈЕ ПРОШИРИТИ ПОЈАМ РИМАНОВОГ ИНТЕГРАЛА НА НЕОГР. Ф-ЈЕ НА КОМПАКТУ, КАО И ИНТ. НА ИНТЕРВАЛИМА ОБЛИКА: $[a,\infty)$, $(-\infty,b]$, $(-\infty,+\infty)$.. (КОЈИ НИСУ КОМПАКТ)

ДЕФ: Ако је деф. $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ и $f\in R[a,\beta]$ $\forall \beta<b$ и ако $a<\beta<b$

$\exists \lim\limits_{\beta\to b}\int_a^{\beta} f(x)\,dx \Rightarrow f$ је <u>ИНТЕГРАБИЛНА</u> на $[a,b)$ у <u>несвојственом смислу</u>.

(* Ако је проблем у "а": $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ и $f\in R[\alpha,b]$ $\forall \alpha>a$ и $\exists \lim\limits_{\alpha\to a}\int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx \Rightarrow$ исто
* Ако је проблем и у "а" и "b", онда поделити интервал неком тачком c, па исто.)

ПР: Посматрамо за $x\in[0,+\infty)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\boxed{f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}}$

$\frac{1}{x^\alpha}$ непр. $\forall [a,b]\subset[\beta,+\infty) \Rightarrow$ интеграбилна на $[a,b]$

<u>Проблематичне тачке</u> су 0 и $+\infty$. Поделимо $[0,+\infty)$ у тачки 1. на $[0,1]$ и $(1,+\infty)$. Сада посматрамо сваки појединачно:

I) За $x\in[0,1]$. Посматрамо контакте облика $[a,1]$, ГДЕ ЈЕ $0<a<1$. Да ли тс постоји $\lim\limits_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha}$?

Подинтегрална ф-ја $f(x)>0 \Rightarrow \int f(x)dx$ <u>монотоно расте</u> када $\alpha\to 0^+$. Дакле, или је $\int f(x)dx$ <u>ОГРАНИЧЕН</u>, па <u>КОНВЕРГИРА</u>, или ЈЕ неограничен и $\longrightarrow\infty$.
(а монотоно опада $\Rightarrow$ $\int$ монотоно расте):

i) $\alpha=1$: $\lim\limits_{a\to0^+}\int_a^1\frac{dx}{x}=\lim\limits_{a\to0^+}(\ln 1-\ln a)=-\lim\limits_{a\to0^+}\ln a=+\infty$ ДИВ! $(\alpha=1)$

ii) $\alpha\neq1$: $\lim\limits_{a\to0^+}\int_a^1\frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{a\to0^+}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^1=\frac{1}{1-\alpha}-\lim\limits_{a\to0^+}\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

$\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha} & \alpha<1\\ \text{ДИВ.} & \alpha\geq1\end{cases}$

II) за $x\in[1,\infty)$ Посматрамо $\lim\limits_{a\to\infty}\int_1^a\frac{dx}{x^\alpha}$

i) $\alpha=1$ $\lim\limits_{a\to\infty}\int_1^a\frac{dx}{x}=\lim\limits_{a\to\infty}\ln a=-\infty$ ДИВ!

ii) $\alpha\neq1$ $\lim\limits_{a\to\infty}\int_1^a\frac{dx}{x^\alpha}=\lim\limits_{a\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^a=\lim\limits_{a\to\infty}\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}=\begin{cases}\text{ДИВ}, & \alpha<1\\ -\frac{1}{1-\alpha}, & \alpha>1\end{cases}$

(1.) Вратимо се на $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. За $0<a<b<\infty$ знамо да постоји $\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha}$,

$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ постоји ~~АКО~~ ⇔ $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ и $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. I постоји за $\alpha<1$,

II за $\alpha>1$, пресек је празан скуп, следи да не постоји $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$!

(Ако су a и b у вези, онда не тражимо $\int$ по произвољној фамилији параметара, него по некој подкласи.

~~КЛАСИЧАН~~ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x}$ ← ДИВЕРГИРА У СМИСЛУ КЛАСИЧНОГ НЕСВОЈСТВЕНОГ ИНТЕГРАЛА. (ДА КОНВЕРГИРА, ОНДА БИ И $\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ МОРАО ДА КОНВ. А ПОКАЗАЛИ СМО ДА ДИВЕРГИРА)

АЛИ, АКО ПОСМАТРАМО У СМИСЛУ ДА ЈЕДНАКО ТЕЖИ КА БЕСКОНАЧНОСТИ: $\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} \frac{dx}{x} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}} \left(\int_{-N}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{N} \frac{dx}{x} \right)$ ОНДА СМО УВЕЛИ ПОЈАМ ПРАВЕ ВРЕДНОСТИ ИНТЕГРАЛА И ТАДА ЋЕ ОВАЈ ИНТЕГРАЛ КОНВЕРГИРАТИ!

КОШИ: (Т.) $\forall \varepsilon>0\ \exists p_0\ \forall b>p''>p'>p_0 \quad \left| \int_{p'}^{p''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \iff \int_a^b f(x)\,dx$ КОНВ.

Доказ: $\varphi(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ конв. $\iff \exists \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-} \varphi(\beta)$

$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$\iff$ важи Кошијев: $\forall \varepsilon>0\ \exists p_0\ \forall b>p''>p'>p_0 \quad |\varphi(p'') - \varphi(p')| < \varepsilon$

ПОЛАКО ПРЕЛАЗИМО НА ЗНАКОПРОМЕНЉИВЕ ПОДИНТЕГРАЛНЕ Ф-ЈЕ

ПОРЕЂБЕНИ: $f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$, $0<|f(x)|\le g(x)$, $f\in \mathcal{R}[a,\beta]\ \forall a<\beta<b$,

$g(x)>0$ / $g(x)$ интеграбилна на $[a,b)$ у несвојственом смислу.

$\Rightarrow |f(x)|$ инт. у несв. смислу $\Rightarrow f(x)$ исто инт. у несв. см.

Доказ: Из пр. $\Rightarrow$ $\forall \varepsilon>0\ \exists p_0\ \forall b>p''>p'>p_0 \quad \left| \int_{p'}^{p''} g(x)\,dx \right| < \varepsilon$ а из услова: $|f(x)|<g(x) \Rightarrow$

$$\left| \int_{p'}^{p''} f(x)\,dx \right| \le \int_{p'}^{p''} |f(x)|\,dx \le \left| \int_{p'}^{p''} g(x)\,dx \right| = \int_{p'}^{p''} g(x)\,dx < \varepsilon$$

(обична p', АПС)

$f, g>0$ и b – проблематична тачка: $f,g\in\mathcal{R}[a,\beta]\ \forall \beta<b$.

и $\exists \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \hat{C} \neq 0$, $C\in\mathbb{R}^+$, $\Rightarrow$ исто понашање f и g око b.

$-\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} - C < \varepsilon \to C-\varepsilon \le \frac{f(x)}{g(x)} < C+\varepsilon \to 0 < g(x)(C-\varepsilon) < f(x) < g(x)\cdot(C+\varepsilon)$

ЕКВИКОНВЕРГЕНТНИ! (2) НА ОСНОВУ ПРЕТХОДНОГ!

Код знако променљивих, $\int$ може бити стр. ако да осцилује

1. ПР: $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ ← на било ком компакту $[1,m)$ интеграбилно ✓

$\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ конв. ✓

да не буде проблем у 1

(I поредбени) $\Rightarrow$ $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ конв. ✓

нема проблем у нули

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ пробамо исто: $\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \frac{1}{x}$ $\int_0^\infty \frac{dx}{x}$ див!

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$

дефинишемо да непрекидност.

$\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ ниже у нули проблем.

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ конв. $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ не конв.

$\Rightarrow$ условно конвергира.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{d(\cos x)}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^\infty - \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$$

$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{dx}{x^2}$ конв $\Rightarrow$ $\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ конв.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \Rightarrow \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,dx \to \text{конв.}$$

(див)

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \quad \text{див!}$$

MATH 20.2.2017

Посматрамо $\mathbb{R}$ и интервал $[a,b]$.
Када је f интегрибилна на $[a,b]$?
Ако је непрекидна, онда јесте.
Дуал простора непр. фђ има везе са фјама огр. вар.
Шта ако ф-ја није лепо деф. на $[a,b]$?
Шта ако је проблематично у некој тачки из $[a,b]$?
Можемо поделити на два интервала на којима је инт. и проблема нема.

случи нам за интервале $[a,+\infty)$

Ако је f тд. $f \in I[a,\beta]$ $\forall \beta < b$ $(a<\beta<b)$, и ако постоји $\lim_{\beta \to b} \int_a^\beta f(x)dx$, тада кажемо да је f интегрибилна на $[a,b]$ у несвојственом смислу.

(ако би проблем био у "а" онда бисмо гледали $a<\alpha$; $\lim_{\alpha \to a} \int_\alpha^b f(x)dx$)

Ако имамо инт. деф. на компакту Ω

$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$
$\bigcup_i K_i = \Omega$

$\int_\Omega = \lim_{i \to \infty} \int_{K_i}$

ДОБРА ДАРБУОВА СУМА

пр: Посматрамо $x \in [0,+\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ← непр. на $[a,b]$ ⇒ интегрибилна на $[a,b]$
Проблематични су 0 и $+\infty$. Пресецемо $[0,+\infty)$ у тачки 1. на $[0,1]$ и $(1,+\infty)$.

(I) $[0,1]$, посматрамо компакте $[a,1]$, $0<a<1$
и ако постоји лимес: $\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ (да ли те да постоји?)
Ако је $f(x) \geq 0$, онда те $\int f(x)$ монотоно да расте уз $\lim$,

па је lim или ограничен па постоји гранична вредност, или иде у бесконачно.

Дакле $\lim\limits_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha}$, $a \searrow 0$ (монотоно опада),

тада $\int \nearrow$ монотоно расте.

НЕ ПОСТОЈИ ИНТ. У НЕСВОЈСТВЕНОМ СМИСЛУ.

за $\alpha = 1$

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0}(\cancel{\ln 1}^{\,0} - \ln a) = -\lim_{a\to 0}\ln a = +\infty$$

за $\alpha \neq 1$

$$\lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{a\to 0}\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)$$

i) постоји lim и коначан је за $\alpha < 1$

ii) не постоји lim за $\alpha > 1$.

II посматрамо $[1,\infty)$ и интеграл $\lim\limits_{a\to\infty}\int_1^a \frac{dx}{x^\alpha}$.

за $\alpha = 1$ имамо $\lim\limits_{a\to\infty}(\ln a - \cancel{\ln 1}^{\,0}) = -\infty$

за $\alpha \neq 1$ имамо $\lim\limits_{a\to\infty}\left(\frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right)$:

i) за $1-\alpha < 0$ коначно, тј. $\alpha > 1$

ii) за $1-\alpha > 0$ не постоји, тј. $\alpha < 1$

III $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$, за $0 < a < b < \infty$, знамо када постоји $\int_a^b \frac{dx}{x^\alpha}$.

Дакле, поделили смо га на два дела. Први постоји за $\alpha < 1$, други за $\alpha > 1$, пресек је празан, па значи да $\int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ не постоји!

Ако би постојала нека веза између a и b, ~~могли~~ ...

ПР: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x}$ ← ако ово постоји, онда постоји и на подскупу, нпр. онда би постојао и $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x}$, али покажимо само да он не постоји.

$\int_{-M}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{M} \frac{dx}{x}$ (права вредност интеграла) ← мање да има lim, око неке тачке ако истом брзином приказимо с обе стране?

(КОШИ) $\left[\forall \varepsilon > 0 \; \exists \beta < b \text{ т.д. } \forall b > \beta', \beta'' > \beta, \left| \int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \right]$

↳ $\Leftrightarrow$ ЕГЗИСТЕНЦИЈИ КОЧЕТНОГ ИНТЕГРАЛА.

(ПОРЕЂЕЊЕ) $[a,b)$. $|f(x)| < g(x)$, $f \in R_{[a,\beta]}$, а g инт. у несвојственом смислу.
$\Rightarrow$ и $|f|$ инт. у несв. смислу. $\Rightarrow$ исто и за f.

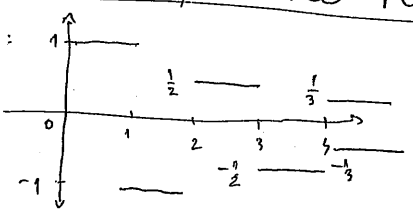
Ако су $f, g > 0$ инт. на $[a,\beta]$ и $\exists \lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = C \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$

ПР: $\int_{1}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ ✓ $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$; $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ ✓ (показали) $\Rightarrow$ постоји

$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ $\int_{0}^{M}$ $\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \frac{1}{x}$ $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$ не постоји! ← чак ни за 1, нема везе

ДАЉЕ, ИСКО ЋЕШ ЗАКЉУЧИТИ ИЗ ПОРЕЂЕЊА

ПР:



УВОДИМО АБЕЛА и ДИРИХЛЕА.

(T.) $f, g, f\cdot g \in R_{[a,\beta]}$ $\forall \beta < b$. ← обично ће бити део по део непр.

(Д) (Д1) f има огр. примитивну ф-ју $F(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx$

$\exists M \quad |F(\beta)| \leq M$

(Д2) g монотоно тежи 0.

$\Rightarrow \int_a^b f\cdot g\,dx$ постоји у несвојственом смислу на $[a,b]$.

(A) (A1) $\int_a^b f(x)\,dx$ инт. у несвојственом смислу

(A2) g монотона.

скица доказа: $\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n (S_i - S_{i-1})\, b_i =$ $S_0 = 0$

$= S_1 b_1 - S_0 b_1 + S_2 b_2 - S_1 b_2 + S_3 b_3 - S_2 b_3 + \dots + S_n b_n - S_{n-1} b_n + - S_n b_{n+1}$

сматрамо да је $b_i \searrow$ (монотоно)

$\sum a_i b_i = \sum_{i=1}^n S_i (b_i - b_{i+1})$

имамо да је $m \leq S_i \leq M$

$m(b_i - b_{i+1}) \leq S_i (b_i - b_{i+1}) \leq M(b_i - b_{i+1})$

Просумирамо

$\Downarrow$

$$\boxed{m b_1 \leq \sum a_i b_i \leq M b_1}$$

$$m\cdot g(a) \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\,dx \leq M\cdot g(a)$$

$$m \leq \int_a^b \frac{f(x)\, g(x)}{g(a)}\,dx \leq M$$

$= \int_a^c f(x)\,dx$ за неко "c".

Закључак: $\exists c$ т.д. $\int_a^b f(x)\, g(x)\,dx = g(a)\cdot \int_a^b f(x)\,dx$

(показали смо за позитивну опадајућу ка нули)

ШТА АКО ЈЕ g поз. опадајућа, али не тежи ка нули? 20.2.2017. МАТФ

$g>0$ $g(x)-g(b)$ ће да буде и тежи ка нули.

и сместо да применимо оно од мало пре.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b)\int_a^b f(x)g(x)\,dx + (g(a)-g(b))\int_a^c f(x)\,dx =$$

$$= g(a)\int_a^c f(x)\,dx + g(b)\int_c^b f(x)\,dx$$

МАТ 4Б

$[a, b]$ ← проблематична

22.2.2017.

(A1) $\exists \int_a^b f(x)\,dx$

(A2) g мон. и огр.

(Д1) $\left| \int_a^x f(t)\,dt \right| \le M$ за $x < b$ ($F(x)$)

(Д2) g мон. и $\to 0$

ДОКАЗ: (Д) $\int_\alpha^\beta f(t)\,g(t)\,dt \overset{\exists c}{=} g(\alpha)\int_\alpha^c f(t)\,dt + g(\beta)\int_c^\beta f(t)\,dt$

$b_0 < \alpha < \beta < b$ $\quad \left|\int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,dx\right| = \left| g(\alpha)\int_\alpha^c f(t)\,dt + g(\beta)\int_c^\beta f(t)\,dt \right| \le$ (*)

$|F(c) - F(\alpha)| \le 2M \qquad |F(\beta) - F(c)| \le 2M$

$\le |g(\alpha)|\cdot 2M + |g(\beta)|\cdot 2M$

$\le \varepsilon\cdot 2M + \varepsilon\cdot 2M = 4M\cdot\varepsilon$

(A) Знамо $\exists \int_a^b f(x)\,dx$, тада за $\gamma, \delta \in (b_0, b)$ имамо

$\left|\int_\gamma^\delta f(t)\,dt\right| < \varepsilon$, g мон. и огр. $\Rightarrow |g| < C$

(*) $\Rightarrow$ $\le |g(\alpha)|\cdot\varepsilon + |g(\beta)|\cdot\varepsilon$

$\le C\cdot\varepsilon + C\cdot\varepsilon = 2C\cdot\varepsilon$

Посматрамо компакти $[a,b]\times[c,d]$ (x, y) и ф-ју $f(x,y)$ деф. на њему.

$f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} g(x)$ ← Т.П.Т. конвергенција фамилије ф-ја $f(x,y)$, ако $\exists$ за $\forall x$.

$(\forall x\in[a,b])(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\,[\,|y-y_0|<\delta \Rightarrow |f(x,y) - g(x)| < \varepsilon\,]$

$\delta(\varepsilon, x)$

нећемо $f(x,y_0)$ је y_0 може буде ∞

$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0)(\forall x\in[a,b])\,[\,|y-y_0|<\delta \Rightarrow |f(x,y) - g(x)| < \varepsilon\,]$

$f(x,y)$ РАВНОМЕРНО конвергира ка $g(x)$ на $[a,b]$ $\quad f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} g(x)$

ГЕОГ И ВАТИНА

Т $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$ $(y \to y_0)$ $\Leftrightarrow$ $f(x,y_n) \rightrightarrows g(x)$ $(n \to \infty)$ $\forall (y_n),\ y_n \to y_0$

ОВО ЈЕ ВЕЗА ИЗМЕЂУ МАТ3 И МАТ4 (НЕКИ КОШИ ИЗ МАТ1)

(КОШИ) НЕ МОРАМО ДА ЗНАМО $g(x)$, А МОЖЕМО ДА ИСПИТУЈЕМО ЊЕНЕ ОСОБИНЕ.

$$f(x,y) \rightrightarrows g(x) \ (y \to y_0) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon)(\exists \delta)\left(\begin{matrix} |y_1 - y_0| < \delta \\ |y_2 - y_0| < \delta \end{matrix} \Rightarrow |f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \varepsilon \right)$$

Т. $(\forall y)\ f(x,y) \in \mathcal{R}[a,b]$ и $f(x,y) \rightrightarrows g(x)$ $(y \to y_0)$

$\Rightarrow g(x) \in \mathcal{R}[a,b]$ и $\boxed{\lim_{y \to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx}$

доказ:

$g(x) = \lim_{y \to y_0} f(x,y)$ узмемо низ бројева y_n који тежи ка y_0: $y_n \to y_0$ $(n \to \infty)$

Сада се позовемо на МАТ3, идентично је.

Т. $f(x,y)$ за фиксирано y је непрекидна по x.

(ДИНИ) $\forall x,\ y \to y_0,\ f(x,y) \to g(x)$ монотоно, $g(x) \in C[a,b]$

ОВЕ ОСОБИНЕ РАЊЕ И ЗА ОПШТИЈЕ СКУПОВЕ ОД КОМПАКТА $[a,b] \times [c,d]$

$\Rightarrow f(x,y) \rightrightarrows g(x)$ $(y \to y_0)$

МОРАМО ДА УЗМЕМО МОНОТОН НИЗ y_n, ДА БИ РАДИЛО ДОКАЗ.

$y_n \to y_0$ монотоно $\quad f(x,y_n) \to g(x)$ монотоно

МАТ3 $\Rightarrow$ ДИНИ $\Rightarrow f(x,y_n) \rightrightarrows g(x)$ за $\forall$ монотон низ $y_n \to y_0$ који $(n \to \infty)$ $\forall x$

МАТ 4

22.2.2017

(Т.) $f(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} g(x)$ (ПАНДАМ КОНВ. У ЈЕДНОЈ ТАЧКИ)

и постоје $f'_x(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} h(x)$ ← (ово повлачи да $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} g(x)$)

$\Rightarrow$ g – диференцијабилна и $g'(x) = h(x)$

т.ј. $\left(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\right)' = \lim\limits_{y\to y_0} \left(f(x,y)\right)'_x$

ЕКВ. СА: $y_n \to y_0 \ (n\to\infty)$, $y_n \neq y_0$

$f(x,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)$ и $\left(f(x,y_n)\right)'_x \underset{\cancel{y_n\to y_0}\ n\to\infty}{\rightrightarrows} h(x)$

$\Rightarrow \left(\lim\limits_{n\to\infty} f(x,y_n)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} \left(f(x,y_n)\right)'_x$ лимеси мењају места.

(Т) САДА ЈЕ БИТНО ДА РАДИМО СА КОМПАКТИМА! ЗА ПРЕТХОДНЕ (Т) НИЈЕ БИЛО БИТНО

$f \in C([a,b]\times[c,d])$ ← непр. у смислу (МАТ 2) ф-је 2 променљиве.

$y \to y_0 \in [c,d]$

одмах можемо гарантовати равномерну конв.

$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} f(x,y_0)$ (КАНТОРОВА ТЕОРЕМА)

Доказ: Треба да процеримо: $f(x,y) - f(x,y_0) \ (<\varepsilon)$, ово треба да буде мало када је $y - y_0 \ (<\delta)$ мало, за $\forall x \in [a,b]$

$$(\forall\varepsilon)(\exists\delta)(\forall x)\Big(\underbrace{d((x',y'),(x'',y''))}_{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2}} < \delta \Rightarrow |f(x',y') - f(x'',y'')| < \varepsilon\Big)$$

из КАНТОРОВЕ (Т) за непр. ф-је на компакту $\Rightarrow$ РАВН. КОНВ.

САДА АКО УЗМЕМО $x' = x'' = x$ и $y' = y$ $y'' = y_0$ и уврстимо горе, добијамо израз за Р.К.

1 $x \in [a,b]$ $\quad f(x,y) \in R[a,b]$

фиксно y

$$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$ * параметарски интеграл *

Т. Ако је $f \in C([a,b]\times[c,d])$

$\Rightarrow I(y) \in C[c,d]$ $\Leftrightarrow$

Доказ: $\lim\limits_{y\to y_0} I(y) = I(y_0)$? Дакле, да ли ово важи?

$\lim\limits_{y\to y_0} \int_a^b f(x,y)\,dx$ ← желимо да може lim да улази под интеграл.

То ће моћи ако $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} f(x,y_0)$, ~~а што~~

~~важи ако $f(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} f(x,y_0)$~~, а ово важи

на основу претходне Т.

Т. $f \in C([a,b]\times[c,d])$ f - непр. $\Rightarrow I(y)$ непр. па зато и интегр.

$\Rightarrow I(y) \in R[c,d]$ (фубини)

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

МАТ 4.

27.2.2017.

(1.) $\left.\begin{array}{l} f \in C([a,b]\times[c,d]) \\ f'_y \in C([a,b]\times[c,d]) \end{array}\right\} \Longrightarrow I(y)$ диф. $+ \; I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)\,dx$

~~$I(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$~~

Доказ: $\dfrac{I(y+h) - I(y)}{h} =$

h – бирамо тако да останемо у домену од I, ако смо у c или d ($y=c \vee y=d$) онда гледамо само десни или леви извод

постоје ови интеграли јер је f непр.

$$= \frac{1}{h}\cdot\int_a^b \left[f(x,y+h) - f(x,y)\right]dx$$

x нам је фиксно, ф-је су непр. диф. из поч. услова, може лагранж.

$$= \frac{1}{\cancel{h}}\int_a^b f'_y(x, \underbrace{y+\theta\cdot h}) \cdot \cancel{h}\cdot dx \qquad 0<\theta<1$$

ова ф-ја нам зависи од x, ~~ан~~ тд. су нам ~~ј~~ θ различите за различите x-ове. а и h-ове

Али, када $h\to 0$ ово ће да $\to y$, без обзира што је θ ружно, тр. зависи од конкретног x.

ако постоји lim мора бити I'_y

$$\lim_{h\to 0}\frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_a^b f'_y(x, y+\theta h)\,dx$$

ако lim може дуђе под $\int$, онда смо решили.

Када може дуђе? Може када је р.к. (прошли час, кантор)

Из услова и тог става $\Rightarrow$ $f'_y(x, y+\theta h) \underset{h\to 0}{\rightrightarrows} f'_y(x,y)$

$\Rightarrow$ lim улази под интеграл.

Ово су минимални услови ~~да~~ за доказ, али је реалније да добијемо да је

$$f \in C^1([a,b]\times[c,d])$$

ШТА АКО СУ НАМ ГРАНИЦЕ ИНТЕГРАЛА НЕКЕ Ф-ЈЕ.

$$I(y) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,y)\,dx \qquad f \in C([a,b]\times[c,d])$$

слика ф-ја $a(x)$ и $b(x)$ треба да буде у интервалу $[a,b]$.
Такође, морамо да пазимо ако је $a(x) > b(x)$, али ако се договоримо да је у том случају само $-\int$ онда ок.

(1) Ако су $a(x), b(x) \in C_{[a,b]} \Rightarrow I(y) \in C_{[c,d]}$

h - мора бити такво да $y+h$ остане у интервалу

тј. на слици ф-је

$$I(y+h) - I(y) =$$

$$= \int_{a(y+h)}^{b(y+h)} f(x, y+h)\,dx - \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx =$$

хоћемо да погашемо да је разлика ∞ мала када $h \to 0$.

$$= \int_{a(y+h)}^{a(y)} f(x,y+h)\,dx + \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y+h)\,dx + \int_{b(y)}^{b(y+h)} f(x,y+h)\,dx - \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx =$$

f - непр. на компакту $\Rightarrow \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

$$= \boxed{\int_{a(y)}^{b(y)}} \left[f(x,y+h) - f(x,y) \right] dx +$$

— ограничени, моћи ћемо ограничимо са ε. за $h \to 0$.

огр $|\cdot| \le M$

$$+ \left| \int_{b(y)}^{b(y+h)} f(x, y+h)\,dx \right| + \dots \le \varepsilon + M\,|b(y+h) - b(y)| +$$

$< \varepsilon$ кад $h \to 0$

аналогно за $\int_{a(y+h)}^{a(y)} f \dots$

МАТ 4. 27.2.2017

(2) $f, f'_y \in C([a,b]\times[c,d])$ (или $f \in C^1([a,b]\times[c,d])$)

$a(y), b(y) \in C^{(1)}_{[c,d]}$ очекујемо диференцијабилности и израз за извод.

$$I(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx$$

минус јер се окрећу границе инт.

$$I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx + f(b(y),y)\,b'(y) - f(a(y),y)\,a'(y)$$

Ако су $a(y)$ и $b(y) = const$, $\Rightarrow a'(y) = b'(y) = 0$ и добијамо први израз $I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'(x,y)\,dx$

Да бисмо доказали овај израз, довољно је доказати за $a(y) = const$, а $b(y)$ да је ф-ја која није const.

(2') $I(y) = \int_a^{b(y)} f(x,y)\,dx$ ← Овако олакшавамо запис доказа (2) јер имамо само једну променљиву границу.

h т.д. $y+h$ буде у домену

$$\frac{I(y+h) - I(y)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{b(y+h)} f(x,y+h)\,dx - \int_a^{b(y)} f(x,y)\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_a^{b(y)} [f(x,y+h) - f(x,y)]\,dx + \int_{b(y)}^{b(y+h)} f(x,y+h)\,dx\right)$$

$$= \int_a^{b(y)} \underbrace{\frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h}}_{f'_y(x,y+\theta h)}\,dx + \frac{1}{h}\int_{b(y)}^{b(y+h)} f(x,y+h)\,dx$$

$b(y)$ – диф. $\Rightarrow$ непр. $\Rightarrow$ вредност х-а $\approx b(y)$

Ако је f'_y непр. онда задовољава Лагранжа

$$\frac{1}{h}\int_{b(y)}^{b(y+h)} f(x,y+h)\,dx = \lim_{h\to 0} f(b(y),y)\,\frac{b(y+h)-b(y)}{h} = f(b(y),y)\cdot b'(y)$$

што је h мање, то ће $f(x,y+h)$ понашати као конс. ф-ја

$$\Rightarrow (2')\quad I'(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f'_y(x,y)\,dx + f(b(y),y)\cdot b'(y)$$

ПРОБАЈ ДОКАЗ ЗА (2).
ОВУ формулу смо користили код Грина.

---

* САДА ГЛЕДАМО СКУПОВЕ КОЈИ нису КОМПАКТ. *

$X=[a,\infty)\quad Y=[c,d]$

ТПТ: $F(x,y) \xrightarrow[y\to y_0]{} G(x)$ (ТПТ) — фиксирамо x, пустимо $y\to y_0$
конвергенција

$$(\forall x\in X)(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta>0)\left(|y-y_0|<\delta \Rightarrow |F(x,y)-G(x)|<\varepsilon\right)$$

~~ТПТ конв.~~ $\delta(x,\varepsilon)$

РАВНОМЕРНА конв.: $F(x,y) \underset{y\to y_0}{\rightrightarrows} G(x)$ ← може и $y\to\infty$ тада ... модификујемо...

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta(\varepsilon)>0)(\forall x\in X)\left(|y-y_0|<\delta \Rightarrow |F(x,y)-G(x)|<\varepsilon\right)$$

НЕ ВАЖЕ ови АБЕЛ, ДИРИХЛЕ и ...

(*) $I(y)=\int_a^\infty f(x,y)\,dx,\quad y\in Y$ т.ј. $\forall y\in Y$ је $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ интеграбилно у несвојственом смислу.

$I(y)$ равномерно конвергентан на Y ако $F(t,y)=\int_a^t f(x,y)\,dx$ р.к на Y.

т.ј. грешку одсецања поред ~~?~~ униформно.
отсечемо $\int_n^\infty$ ~~...~~ $n\to\infty$ и онда радимо са компактом?

КОШИ:

МАТ 4

27.2.2017

(Т.) $I_{(y)}$ Р.К. НА Y ← АКО СЕ НЕ КАЖЕ, ПОДРАЗУМЕВА СЕ ДА Р.~~КОНВ~~. НА ЦЕЛОМ ДОМЕНУ.

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon>0)(\exists t_0 \geq a)(\forall y \in Y)\left([\forall t_2>t_1 \geq t_0) \Rightarrow \left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx\right|<\varepsilon\right)$$

КОРИСТИ НАМ ДА РАДИМО СА СВОЈСТВЕНИМ, ТЈ. СРЕДИМО НЕСВОЈСТВЕНИ?

(Т.) $\exists\ \varphi: [a,\infty) \to \mathbb{R}$ (ВАЈЕРШТРАС)

НЕСВОЈСТВЕНИ

$$(\forall y \in Y)(\forall x)\ \exists \int_a^\infty \varphi(x)\,dx, \quad |f(x,y)| \leq \varphi(x)$$

$\Rightarrow I_{(y)}$ Р.К. на Y.

битно да је процена ради за $\forall y$

Ако не можемо да процеримо за φ $[a,\infty)$, уведемо $a<a_1<\infty$ т.д. има за φ (a_1,∞), а $[a,a_1)$ радимо као за својствени.

Доказ: ПРЕКО КОШИЈА

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx\right| \leq \int |\,| \leq \int_{t_1}^{t_2} \varphi(x)\,dx < \varepsilon \quad \forall \varepsilon\ \exists t_0$$

✓

∎

МАТ 4 1.3.2017.

(Т) $f(x,y)$, $x \in [a,+\infty)$, $y \in Y$

(ДИРИХЛЕ)

(НЕКАД ГА ЗОВУ АБЕЛ)

* $\exists F(t,y) = \int_a^t f(x,y)\,dx$

* $|F(t,y)| \le M$ ← $M \in \mathbb{R}$ $\forall t, \forall y$ ОВО ВАЖИ, ШТО ЗНАЧИ ДА ЈЕ РАВНОМЕРНО ОГРАНИЧЕНО. $(a < t < +\infty)$

* $g(x) \searrow$ и $\to 0$ на $[a,+\infty)$ (ЧЕСТО НА ГИСМЕНОМ)

$$\Rightarrow \quad I(y) = \int_a^\infty F(x,y)\, g(x)\,dx$$

(Т) $f(x,y)$, $x \in [a,+\infty)$

ЗА СВОЈСТВЕНЕ

- $\forall b > a$ на $[a,b]$ $f(x,y) \underset{y \to y_0}{\rightrightarrows} g(x)$ y_0 тачка нат. на Y
- $I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx$ Р.К. НА Y. — Р.К. У ОКОЛИНИ СИНГУЛАРИТЕТА ИНТЕГРАЛА (ДОДАЈЕМО УСЛОВ ЗА НЕСВОЈСТВЕНЕ)

$$\Rightarrow \quad \lim_{y \to y_0} I(y) = \lim_{y \to y_0} \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty g(x)\,dx$$

($\lim$ и $\int$ мењају место)

ПОСЛЕДИЦА ОВОГ УСЛОВА ЈЕ ДА ЈЕ $g(x)$ ИНТЕГРАБИЛНО.

Док: За неко $\varepsilon > 0$ треба наћи t_0, т.д. за ~~изаб~~ све $t_2 > t_1 > t_0$ МОЖЕМО ДА ИСКОНТРОЛИШЕМО: ИНТЕГРАЛ:

ИНТ. НА КОМПАКТУ $\int_{t_1}^{t_2} g(x)\,dx$ ← ОВО БИ ТРЕБАО ДА БУДЕ ЛИМЕС ОД $\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx$.

Прошле среде смо показали да је Р.К. $f \rightrightarrows g$ на $[a,b]$ довољан услов да би $\lim_{y \to y_0} \int_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx = \int_{t_1}^{t_2} g(x)\,dx$.

Дакле $(\forall \varepsilon > 0)(\exists t_0 \in \mathbb{R})(\forall t_2 > t_1 > t_0)\left(\left|\int_{t_1}^{t_2} f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\int_{t_1}^{t_2} g(x)\,dx\right| < \varepsilon\right)$

$\forall y \in Y$ (довољно гледати $\forall y \in U(y_0)$)

Сад пошто радимо са несвојственим гледамо од a до нешто, где нешто $\to \infty$

формирамо растући низ:

$a < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots \qquad t_n \to \infty$

$$\lim_{y\to y_0} I_n(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^{t_n} f(x,y)\,dx = \int_a^{t_n} g(x)\,dx$$

ОВДЕ РАДИМО СА КОМПАКТИМА, ПА ЈЕ ТАЧНО НА ОСНОВУ (Т) ОД ПРОШЛЕ СРЕДЕ ЗА СВОЈСТВЕНЕ ИНТЕГРАЛЕ.

САДА ТРЕБА ДА ДОДАМО ЈОШ $\lim\limits_{n\to\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{y\to y_0} I_n(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

ХОЋЕМО ДА ЗАМЕНИМО МЕСТА ЛИМЕСИМА, А ТО МОЖЕМО НА ОСНОВУ 2. УСЛОВА ТЕОРЕМЕ.

(Т.) (1) $f \in C([a,+\infty) \times [c,d])$

(2) $I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ Р.К. НА $[c,d]$

$\Rightarrow \quad I(y) \in C[c,d]$

Доказ: Ако је $f \in C([a,+\infty) \times [c,d]) \Rightarrow f \in C([a,t_n] \times [c,d])$

НЕПР. $\quad 0 < t_n < \infty$

$$I_n(y) = \int_a^{t_n} f(x,y)\,dy \quad / \lim_{y\to y_0}$$

$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$

НИЈЕ МОРАМО

$$\lim_{y\to y_0} I_n(y) = \lim_{y\to y_0} \int_a^{t_n} f(x,y)\,dx$$

$$I_n(y_0) = \int_a^{t_n} f(x \quad \dots$$

(1)

???????????

(Т.) $f(x,y) \in C([a,+\infty) \times [c,d])$, $f(x,y) \geq 0$

$I(y) = \int_a^{\infty} f(x,y)\,dx \in C[c,d]$ (ДИНИ)

$\Rightarrow \quad I(y)$ Р.К. НА $[c,d]$

СЕЧЕМО ОБЛАСТ НА $[a,t_n] \times [c,d]$, ШТАМО НЕПР. И Р.К. НА

$I_n(y) = \int_a^{t_n} f(x,y)\,dx$ МОРАМО ДУЗНЕМО $t_n < t_{n+1}$ $\quad t_n \to \infty$

$\Rightarrow \quad I_n(y) \nearrow I(y)$

ТЕОРЕМА О ИНТЕГРАЛУ НЕСВОЈСТВЕНОГ ИНТЕГРАЛА

1.3.2017.

(Т.) $f(x,y) \in C([a,+\infty)\times[c,d])$

$I(y)$ Р.К. НА $[c,d]$ ← ЗА КОНТРОЛУ НЕСВОЈСТВЕНИХ (ПОНАШАЊЕ У СИНГУЛАРИТЕТУ) У ОКОЛИНИ ТЕ ТАЧКЕ, АКО ЈЕ КОНАЧНА?

$\Rightarrow I(y) \in R[c,d]$

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d \left(\int_a^\infty f(x,y)\,dx\right)dy = \int_a^\infty \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

(Т.) $f(x,y) \in C([a,\infty)\times[c,\infty))$, $\underline{f \geq 0}$

$$I(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx \in C[c,+\infty)$$

$$J(x) = \int_c^\infty f(x,y)\,dy \in C[a,+\infty)$$ ← ЗА СВАКИ НОВИ СИНГУЛАРИТЕТ ИМАМО НОВИ УСЛОВ Р.К.

~~Ако ∃~~ Ил' су обе инт. и (=), ил' ~~нису~~ није ни једна

$$\exists \int_c^\infty I\,dy < \infty \Rightarrow \exists \int_a^\infty J\,dx < \infty \qquad + \int_c^\infty I\,dy = \int_a^\infty J\,dx$$

$$\exists \int_a^\infty J\,dx < \infty \Rightarrow \exists \int_c^\infty I\,dy < \infty$$

Док: КОРИСТИМО ДИНИЈА

ГЛЕДАМО $[a,b_n]\times[c,d_n]$ ~~НЕПР.~~ ОВДЕ ЈЕ НЕПР. Ф.ЈА, И. . . . ИЛИ САМО НИЗ d_n — ОВА РАДИМО И СВЕДЕМО НА ПРЕТХОДНУ СИТУАЦИЈУ $[a,\infty)\times[c,d_n]$.

(Т.) $f(x,y) \in C([a,+\infty)\times[c,d])$; $f'_y(x,y) \in C([a,+\infty)\times[c,d])$

$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx$ КОНВ. за $\forall y \in [c,d]$

$\int_a^\infty f'_y(x,y)\,dx$ Р.К. НА $[c,d]$.

$\Rightarrow I(y) \in D[c,d]$

$$I'(y) = \int_a^\infty f'_y(x,y)\,dx$$

ПР: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ ~~sin x~~ $f(x,y) = \begin{cases} e^{-yx}\cdot\frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ ПРОДУЖЕНО ПО НЕПРЕКИДНОСТИ.

$f \in C([0,+\infty)\times[0,+\infty))$

АКО ПРОБАМО ДА РАЧУНАМО $\frac{\sin x}{x}$, НЕЋЕ ДА МОЖЕ.

$f'_y(x,y) = -e^{-yx}\cdot\sin x$

ТРЕБА УСТАНОВИТИ ДА ЛИ $\int_0^\infty f(x,y)\,dx$ уопште постоји.

МАТ4

6.3.2017.

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, идеја: посматрамо фју

$y>0$ $\quad f(x,y) = \begin{cases} e^{-yx}\cdot\frac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$ $\quad (x,y)\geq 0$

← допуњено по непрекидности

Диференц. ~~у~~ $A-$ на отвореном првом квадранту непрекидно је на затвореном првом квадранту.

параметар

$$\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx = \int_0^\infty e^{-yx}\,d(-\cos x) = \left[e^{-yx}(-\cos x)\right]_0^\infty - y\int_0^\infty e^{-yx}\underbrace{\cos x\,dx}_{d(\sin x)} =$$

$y>0$

$$= 1 - y\int_0^\infty e^{-yx}\,d(\sin x) = 1 - y\left[\left(e^{-yx}\sin x\right)\Big|_0^\infty + y\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx\right]$$

$$(1+y^2)\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx = 1$$

$$\int_0^\infty e^{-yx}\sin x\,dx = \frac{1}{1+y^2} \quad ; \quad \int_1^\infty e^{-yx}\sin x\,dx = \frac{Ce^{-y}}{1+y^2} \leq \frac{M}{1+y^2}$$

$$I(y) = \int_0^\infty e^{-yx}\cdot\frac{\sin x}{x}\,dx \leftarrow \text{Шта је домен ове фје?}$$

$y\in[0,\infty)$

$$= \int_0^1 + \int_1^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

→ постоји по Дирихлеу

интеграл на компакту непр. фје ⇒ конв. (чак и равн. конв.)

Инт. $I(y)$ је добро деф. за $y\geq 0$ и непр. на $[0,\infty)$

$$I(0) = \lim_{y\to 0}\int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx$$ иду лимес под интеграл по непрекидности.

$$I(0) = \int_0^\infty \lim_{y\to 0} e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$0 < Y_0 \le Y$ $\quad \left| e^{-xy} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \right| \le e^{-Y_0 x}$

шта је са $\lim_{Y \to \infty} I(y)$ $\qquad \lim_{Y \to \infty} I(y) = 0$

По (Т) о диф. по параметру: $\qquad \left(\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, dx = \frac{1}{1+y^2} \right.$

$$I'(y) = \int_0^\infty -e^{-xy} \sin x \, dx = -\frac{1}{1+y^2}$$

$$\int_0^\infty I'(y)\, dy = -\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{Y \to \infty} I(y) - I(0) = -I(0) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{I(0) = \frac{\pi}{2}} \qquad \text{тј.} \qquad \boxed{\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}}$$

Варијациони рачун

$J: Y \to \mathbb{R}$ $\qquad$ Желимо теорију екстрема да применимо на просторе функција

↖ простор ф-ја (векторски простор) са пољем скалара $\mathbb{R}$

ФУНКЦИОНАЛ: пресликавање век. прост. у његово поље скалара

Фрешеов извод: Уреков најприближнији линеарне...

Дата је нека норма $\|\cdot\|$ на Y.

Y_0 – локални минимум (максимум)

$(\forall \varepsilon > 0)(\forall y$ из околине$)\ \|y - Y_0\| < \varepsilon \qquad J(y) \ge J(y_0)$ $\quad (\le)$ $\quad$ ← ~~ТАЧКА ЕКСТРЕМУМА~~

МАТИ

$v \in Y$ $\quad y$ – фиксирано (у тој тачки радимо) 6. 3. 2017.

$$\frac{J(\overbrace{y+\varepsilon\cdot v}^{\in Y}) - J(y)}{\varepsilon}$$ → аналогија за извод у правцу v. → не тражимо да буде јединични (ако је f комплексно, онда да)

разлика 2 реална бр. кроз реалан бр.

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{J(y+\varepsilon v) - J(y)}{\varepsilon} = \delta J(y,v)$$

ГАТОВ ИЗВОД ФУНКЦИОНАЛА у тачки y у правцу v.

у смеру од v

варијација (може и $\delta J_y(v)$)

зависи од y и v.

ПРИМЕРИ: (1) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$, $\|v\| = 1$ ← стандардна суклидска норма, јединични вектор

$$\delta J(y,v) = \langle \nabla f(y), v \rangle$$ ← скаларни производ

(2) $$J(y) = \int_a^b \left[f(x) + y^2(x) \right] dx$$

Када смемо да причамо о интегралу?

Нпр. Када су $f(x)$ и $y^2(x)$ непр ($C[a,b]$)

Пр: 1) $C[a,b]$, 2) $C^{(k)}[a,b]$ ← реални векторски простори

3) $(C[a,b])^n$ ← простор n-торки непрекидних ф-ја

пр. $(g_1(x), \dots, g_n(x))$

4) Из историје физике, интересантни су:

$y \in C[a,b]$, $\quad y(a) = y(b) = 0$

$$Y = \{ y \mid y \in C[a,b] \wedge y(a) = y(b) = 0 \}$$

да ли је ово реалан векторски простор?

$(y_1 + y_2)(a) = y_1(a) + y_2(a) = 0$ ✓

$(\lambda \cdot y_1)(a) = \lambda \cdot y_1(a) = \lambda \cdot 0 = 0$ ✓

5) $Y = \{ y \mid y \in C[a,b] \wedge y(a) = 0 \quad y(b) = 1 \}$

ОВО НИЈЕ РЕАЛНИ ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР, АЛИ МОЖЕ ДА СЕ ДОРАДИ, ДОДАЈ КОРЕКЦИЈЕ, ПА ДА ФУНКЦИОНИШЕ.

ПР: $Y = \underset{y \in}{C}[a,b]$

$$J(y) = \int_a^b [f(x) + y^2(x)]\,dx \quad \checkmark \quad \text{коректно деф. } J : Y \to \mathbb{R}$$

$$\boxed{\int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx \leftarrow \text{желимо да испратимо екстреме овога за довољно лепо } F.}$$

$f = f(x) \quad y = y(x) \quad v = v(x)$

$$\frac{J(y+\varepsilon v) - J(y)}{\varepsilon} = \frac{\int_a^b [f + (y+\varepsilon v)^2]\,dx - \int_a^b [f + y^2]\,dx}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\int_a^b [2yv\varepsilon + \varepsilon^2 v^2]\,dx}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\cancel{2}^{1} \cdot \int_a^b 2yv\,dx + \varepsilon^{\cancel{2}\,1} \int_a^b v^2\,dx}{\cancel{\varepsilon}_1}$$

УЗЕЛИ СМО ЛИНЕАРНИ ДЕО ПРИРАШТАЈА

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J(y+\varepsilon v) - J(y)}{\varepsilon} = 2\int_a^b y(x)\,v(x)\,dx \longrightarrow \text{дакле } \exists \text{ интеграл за } \forall v$$

и једнак је првом интегралу.

$$\Rightarrow \boxed{\delta J(y, v) = \int_a^b 2\,y(x)\,v(x)\,dx}$$

(ИДЕЈА ЛИНЕАРИЗАЦИЈЕ ПРИРАШТАЈА)

САДА ИСТО ОВО, АЛИ НА ДРУГИ НАЧИН:

$$\Big(\int_a^b \underbrace{[f + (y+\varepsilon v)^2]}_{\text{Р.К на контакту}}\,dx \Big)'_\varepsilon = \int_a^b [2(y+\varepsilon v)v]\,dx \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \int_a^b 2yv\,dx$$

непр. ф-ја на контакту

Пр: $J_{(y)} = \int_a^b F(x, y_{(x)}, y'_{(x)})\,dx$ Одредимо домен за F дио је слика у $\mathbb{R}$, мора се бити $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$F^{(x,y,z)}$ ← стандардне координате

Због интеграла, мин. који гарантују јо да $F \in C(\mathbb{R}^3)$

Хајмо мало више: нека је

$F \in C^{(1)}(\mathbb{R}^3)$, $y \in Y = C^{(1)}[a,b]$ ← реалан векторски простор

($\Rightarrow y'$ је непр.)

онда мале промене y и y' праве мале промене F!

$$J(y+\varepsilon v) = \int_a^b F(x, y_{(x)} + \varepsilon v_{(x)}, y'_{(x)} + \varepsilon v'_{(x)})\,dx$$

$$\delta J(y,v) = \int_a^b \left[F'_y\, v_{(x)} + F'_z\, v'_{(x)} \right] dx$$

Симбетне, h, g ← мечи на извод производа

$$\int_a^b \left(g_{(x)} v_{(x)} + h_{(x)} v'_{(x)}\right) dx$$

ако је $h = g'$ и гранични услови да се потрефе, ово је тот. диференцијал

за неке услове на v-овима, какви су g и h?

Ако је $\int_a^b g(x)\, v(x)\, dx = 0$

g - непр.

МАТ4 8.3.2017

ЛЕМЕ ДУБО-РЕЙМОНДА: (dubois reymond lemma)

(ПОМОЋНЕ ЛЕМЕ ЗА ОЈЛЕР-ЛАГРАНЖОВУ Ј-НУ)

(1) $h \in C[a,b]$, компакт у $\mathbb{R}$

Ако $\int_a^b h(x)\, v'(x)\, dx = 0$, $\forall v \in C^{(1)}[a,b]$, $v(a) = v(b) = 0$ (ГРАНИЧНИ УСЛОВ) $\Rightarrow h(x) \equiv const$

Ако ово важи за $\forall v$, шта мора бити ф-ја $h(x)$?

Први покушај би био парцијална интеграција и добили бисмо ✓, али не знамо да ли је $h(x)$ диференцијабилно, али можемо користовати.

$$v(x) = \int_a^x [h(t) - c]\, dt$$

БИЋЕ ПОЛ. ВЕЋЕГ СТЕПЕНА У ЗАВИСНОСТИ ОД ГЛАТКОСТИ КОЈУ ЖЕЛИМО ДА ПОСТИГНЕМО.

$v(a) = 0$ корекција т.д. $v(b) = 0$

$$\int_a^b h(x)\, d(v(x)) = \cancel{h(x)\, v(x)\Big|_a^b} - \int_a^b h'(x)\, v(x)\, dx = 0$$

$$h(x)\, v(x)\Big|_a^b$$

$v(x) \in C^{(1)}[a,b]$, $v'(x) = h(x) - c$

$$v(b) = \int_a^b [h(t) - c]\, dt = \int_a^b h(t)\, dt - c(b-a) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\, dt = c}$$

$$0 = \int_a^b h(x)\, v'(x)\, dx = \int_a^b [h(t) + c - c][h(t) - c]\, dt = \int_a^b [h(t) - c]^2\, dt + \frac{1}{b-a}\int_a^b h(t)\, dt \cdot \int_a^b h(t)\, dt - c^2 \int_a^b dt =$$

$$= \int_a^b [h(t) - c]^2\, dt + \cancel{\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b h(t)\, dt\right)^2} - \cancel{\frac{1}{(b-a)^2}\left(\int_a^b h(t)\, dt\right)^2 \cdot \int_a^b dt}\ (b-a)$$

$$\int_a^b dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{[h(t) - c]^2}_{\text{НЕПРЕКИДНА и НЕ-НЕГАТИВНА, СЛЕДИ } h(t) - c = 0}\, dt$$

избегли смо $h'(x)$, него смо интеграли, а v смо наштелили за доказ.

(2) $g, h \in C[a,b]$, $\forall v \in C^{(1)}[a,b]$, $v(a) = v(b)$ и

$$\int_a^b [g(x)v(x) + h(x)v'(x)]\,dx = 0$$ (УОПШТЕЊЕ ПРВЕ ЛЕМЕ ЗА $g(x) = 0$)

(Ако би $h'(x) = g(x)$, имали бисмо извод производа,

$h'v + hv' = (h \cdot v)'$ $\Rightarrow$ $\int = h \cdot v \Big|_a^b = 0$ ✓)

$\Rightarrow$ $h(x)$ је диференцијабилна на $[a,b]$ и

$h'(x) = g(x)$

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

$$\int_a^b g(x)v(x)\,dx = G(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)v'(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \underbrace{(h(x) - G(x))}_{\text{НЕПРЕКИДНО, игра улогу } h(x) \text{ из леме (1).}} v'(x)\,dx$$

$\Rightarrow$ можемо да применимо лему (1).

$\Rightarrow$ $\exists c$, т.ј. $h(x) - G(x) = c$ ← $G(x)$ диференцијабилна

$h(x) = G(x) + c$

$\Rightarrow$ $\exists\, h'(x)$ и $h'(x) - g(x) = 0$

тј. $h'(x) = g(x)$ ∎

За $h(x) = 0$ имамо лему (1)?

$\Downarrow$

$g(x) = 0$

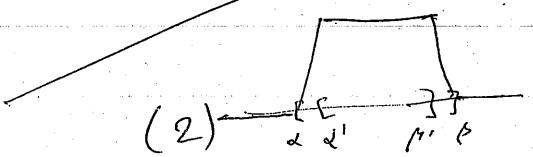
ЛЕМА СА ПОЧЕТКА:

$\int_a^b h(x)v(x)\,dx = 0$

$v = \chi_{[\alpha,\beta]}$ $h, v \in C^{(1)}[a,b]$

$v(a) = v(b) = 0$

$[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$



$h \geq \frac{M}{2}$ M – макс. ф-је

МАТ4 8.3.2017.

(3) $G, H \in (C[a,b])^n$ ← ВЕКТОРСКИ ПРОСТОР

$\forall V \in (C^{(1)}[a,b])^n$, $V(a) = V(b) = 0$

$$\int_a^b [G(x) \cdot V(x) + H(x) V'(x)]\, dx = 0$$

$\Rightarrow$ H је диф. (СВАКА КООРДИНАТА ЈЕ ДИФ.)

и $H' = G$ (по свакој координати)

$H = (0, \dots, 0, v_k, 0, \dots, 0)$ $\cancel{(h_1', \dots, h_n')}$ $H = (h_1, \dots, h_n)$

(проширење на коначно дим. век. простор) $G = (g_1, \dots, g_n)$

$h_k' = g_k$ $k = \overline{1, n}$

по свакој координати применимо (2).

(4) $(\forall v)$ $v \in C^{(m)}[a,b]$, $v^{(k)}(a) = v^{(k)}(b) = 0$, $\forall k \in \{0, \dots, m\}$

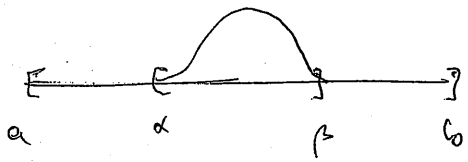
и $g \in C[a,b]$ и $\int_a^b g(x) \cdot v^{(m)}(x)\, dx = 0$. ФУНКЦИОНАЛ НА ВЕК. ПРОСТОРУ.

$g(x)$ је полином и његов степен је $\leq m-1$

ПОГРЕШАН ДОКАЗ БИ БИО n ПАРЦ. ИНТЕГРАЦИЈА ЈЕР ПОВЕЋАВАМО ИЗВОДЕ НА $g(x)$, АЛИ НЕ ЗНАМО ДА ЈЕ $g(x)$ ДИФ.

ДОКАЗ: $g(x)$ – непр → негде узима свој max $M = \max g(x)$ на $[a,b]$

ДАКЛЕ У НЕКОЈ ОКОЛИНИ M, ИМА ИНТЕРВАЛ $[\alpha, \beta]$ ГДЕ је $0 < \frac{M}{2} \leq g(x)$, битно да је $g(x)$ ту позитивно



КОНСТРУИШЕМО ФУЈУ КОЈА ЈЕ > 0 НА (α, β) и $= 0$ ван.

$v(x) = [(x-\alpha)(\beta - x)]^{m+1}$, $x \in [\alpha, \beta]$

$v(x) = 0$, $x \notin [\alpha, \beta]$

(3)

$v(x)$ — ненегативна

$v(x) > 0$ на $x \in (\alpha, \beta)$

у тачки $x = \alpha$, вредности од 1. до m-тог. извода од $v(x) = 0$

Домаћи: Направи ф-ју ...

За идући час, (2) лема и гатоов извод

$$\int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx.$$

Додатни захтев глаткости не утиче на вредност интеграла.

13.3.2017.

$$F(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,dx$$

$y \in C^{(1)}[a,b]$

f'_y парц. извод f по 2. променљивој

$f'_{y'}$ - парц. извод f по 3. променљивој.

$f, f'_y, f'_{y'} \in C^{(1)}([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

НАМЕЋЕМО МИН. УСЛОВЕ ЗА ПРИМЕНУ ГАТООВОГ ИЗВОДА.

$$\delta F(y, v) = \int_a^b \Big[\underbrace{f'_y(x)}_{g} \cdot v(x) + \underbrace{f'_{y'}}_{h} \cdot v'(x)\Big]\,dx$$

$y(a) = a_1$

$y(b) = b_1$

$y \in C^{(1)}[a,b]$

НАЂЕМО a-ју

$z(a) = a_1$

$z(b) = b_1$

$z \in C^{(1)}[a,b]$

$C^{(1)}[a,b]$ - век. простор

$y - z \in C^{(1)}[a,b]$

$(y-z)(a) = 0$

$(y-z)(b) = 0$

КО АФИНИ ПРОСТОР

$v \in C^{(1)}[a,b]$

$v(a) = 0$

$v(b) = 0$

ПОСЛЕДИЦА ЛЕМЕ ДУБО РЕИМОНД:

$$\frac{d}{dx}\left(f'_{y'}(x)\right) = f'_y(x)$$

СВЕ ЗАВИСИ ОД x

ДОБИЈЕ СЕ Д.Ј. ПО x $\rightarrow$ I ОЈЛЕР-ЛАГРАНЖОВА ЈН.

РЕШ. I О-Л Ј-НЕ СУ КАНДИДАТИ ЗА ЕКСТРЕМЕ.

$$\left[\, f'_{y'}(x) = \int_a^x f'_y(t)\,dt + C \,\right]$$

СПЕЦ. СЛУЧАЈ:

(A) $\underset{(x,y,z)}{f} = f(z)$ АКО НЕМА x и y.

$f'_y = 0$ (парцијални) тј. $f = f(y'(x))$

$\Rightarrow$ $f'_{y'}(x) = C_{const.}$

Пр.: $F(y) = \int_0^x \sqrt{1 + (y'(t))^2}\,dt \longrightarrow \dfrac{\cancel{2}y'}{\cancel{2}\sqrt{1+(y')^2}} = const. \Rightarrow y' = const.$

$y(x) = C_1 x + C_2$

АКО ЈУРИМО ЕКСТРЕМ У РАВНИ, МИНИМАЛНА РАСТОЈАЊА СУ МЕЂУ ПРАВАМА.

(Б) $\underset{(x,y,z)}{f} = f(x,z)$ тј. $f = f(x, y')$ нема y

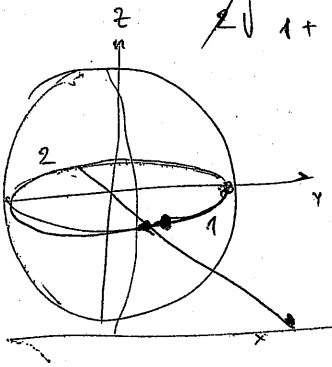
исто $\longrightarrow$ $f'_{y'}(x) = \text{Const.}$ $\quad f'_y = 0$

опет екстреми ~~а~~ међу линеарним линијама.

ПР: $F_2(y) = R \cdot \int_0^{\varphi_1} \sqrt{1+(y'(t)\sin t)^2}\, dt$ ← дужина лука на сфери полупречника R.

полупречних сфере у равни

$\Rightarrow \dfrac{\cancel{2}y'\sin^2\varphi}{\cancel{2}\sqrt{1+(y'\sin\varphi)^2}} = \text{const.} \Rightarrow y' = \text{const}$



као реш. добијемо лукове 1 и 2, треба проверити који је мин.

Додајмо још један услов.

$f \in C^{(1)}([a,b] \times \mathbb{R}^2)$ и $y \in C^{(2)}[a,b]$.

$\dfrac{d}{dx} f(x, y(x), y'(x)) = f'_x(x) + \overset{h'}{f'_y(x)}\, y'(x) + \overset{h}{f'_{y'}(x)} \cdot y''(x) =$ (формула тот. прираштаја)

парцијални по x парц. по y парц по y'.

$= f'(x) + \dfrac{d}{dx}\left[f'_{y'}(x) \cdot y'(x)\right]$

$$\boxed{f(x, y(x), y'(x)) - f'_{y'}(x) \cdot y'(x) = \int_a^x f'_x(t)\,dt + C_1}$$

Ако y ~~зад~~ стац. $\Rightarrow$ y задовољава I о-л. ј-ну. $\longrightarrow$ II о-л. ј-на.

↳ тачна и без п.п. да $y \in C^{(2)}[a,b]$, али треба другачији доказ.

Докажи без. коришћења $y \in C^{(2)}[a,b]$.

Типична примена: брзо искаче теорема о Лагранжовим множиоцима.

КОМПЛЕКСНА МАТЧ 13. 3. 2017.

$\mathbb{R}^2$ $\quad d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ ЕУКЛИДСКА МЕРА

(x,y)

↳ комплетан метрички простор.

$x^2+1=0$; $\quad z = x+iy \xrightarrow{\text{БИЈЕКЦИЈА}} (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad x = \operatorname{Re} z$, $\quad y = \operatorname{Im} z$ → особине $\mathbb{R}^2$ као В.П.

$z_1 = x_1 + iy_1$

$z_2 = x_2 + iy_2$

$\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow z_1 + z_2 =$ ОДГОВАРА САБИРАЊУ ВЕКТОРА ИЗ ВЕКТОРСКОГ ПРОСТОРА.

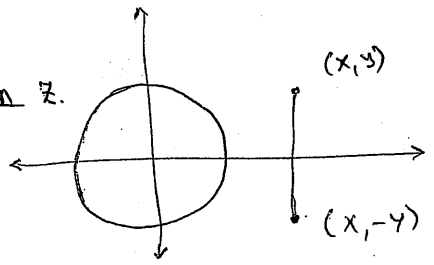
$$z_1 + z_2 = (x_1+x_2) + i(y_1+y_2)$$

$$\lambda z_1 = (\lambda x_1) + i(\lambda y_1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$\bar{z} = x - iy$

КОНЈУГАТ од z.



$\bar{z} \longleftrightarrow z$

БИЈЕКЦИЈА

z-не имају исти бр. реш. по z и $\bar{z}$.

$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2$ ← нема имагинарног дела

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ ← ј-на кружнице

$|\,| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+$ само за $z=0$ $\quad |0| \longleftrightarrow (0,0)$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

* НЕ ВАЖЕ АКСИОМЕ за $\mathbb{R}$, тј. не важе само АКСИОМЕ ПОРЕТКА ЗА $\mathbb{R}$., тј. решавање неједначина за $\mathbb{C}$ ~~...~~ попут оних за $\mathbb{R}$ нема смисла. (можемо увести неки рандом поредак, али не и онај који чува алгебарске операције).

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$ ✓ — ОВО ЈЕСТЕ СТАНДАРДНА МЕТРИКА

$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$

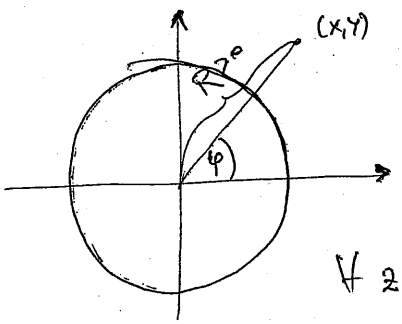
$\Rightarrow$ $\mathbb{C}$ ЈЕСТЕ МЕТРИЧКИ ПРОСТОР СА ОВОМ МЕРОМ.

$|\lambda \cdot z| = |\lambda| \cdot |z|$

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$|z+w| \leq |z| + |w|$ ЈЕДНАКОСТ КАДА СУ z и w КОЛИНЕАРНИ И ИСТОСМЕРНИ, ТАДА ВАЖИ: $z = \lambda \cdot w$ ∨ $w = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$?

$z = (x, y) = (R, \varphi)$ (где је $R = |z|$) КАДА ЈЕ $R = 0$, φ – било шта, није деф.



$\left(\frac{x}{R}, \frac{y}{R}\right)$ — тачка са ЈЕДИНИЧНЕ КРУЖНИЦЕ

$=$

$(\cos\varphi, \sin\varphi)$ — φ НИЈЕ ЈЕДИНСТВЕНО ЈЕДИНСТВЕНО ЈЕР ДО НА САБИРАК $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\forall z$, т.ј. $|z| > 0$ $\exists R, \varphi$.

$z = R \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$ ПО МОДУЛУ СУ 1 ЗА ТО ИМ И ПРОИЗВОЉНО ЧИТО БИТИ.

$z_1, z_2 \neq 0$

$z_1 \cdot z_2 = R_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot R_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$

$= R_1 \cdot R_2 \cdot [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ ЗАТО НЕ ТРЕБА ДА φ БУДЕ ИЗ ИНТЕРВАЛА $(0, 2\pi]$

ПОЛАРНИ ОБЛИК КОМПЛЕКСНОГ БРОЈА.

(ДОБАР ЗА МНОЖЕЊЕ)

МУАВРОВА ФОРМУЛА: $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$z^n = R^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2i\sin\varphi\cos\varphi$

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)$

ФОРМУЛЕ ЗА АВОСТРУКИ И ТРОСТРУКИ УГАО.

ЗНА: $z^n = 1$

↳ по синхронизации $|z|^n = 1 \rightarrow |z| = 1$

$z = 1 \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\varphi = 0 : \quad z = 1$

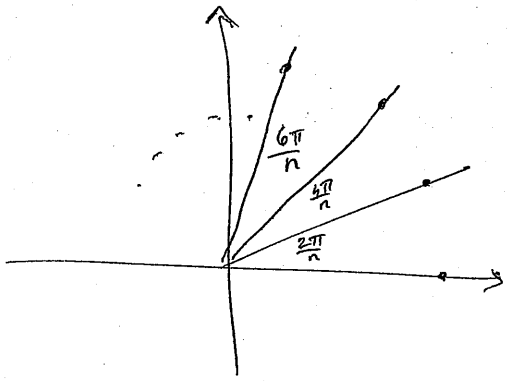
$\varphi = \frac{2\pi}{n} : \quad z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

$\varphi = \frac{4\pi}{n} : \quad z = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}$

$\vdots$

$\varphi = \frac{(n-1)2\pi}{n} : \quad z = \cos\text{---} + i\sin\text{---}$

$\varphi = \frac{n}{n}2\pi$



РЕШЕНА $z^n = 1$ су темена ПРАВИЛНОГ n-тоугла.

$a \in \mathbb{C} \quad a = (a_1, a_2) \quad z = (x, y)$

$z \rightarrow z + a$ транслација

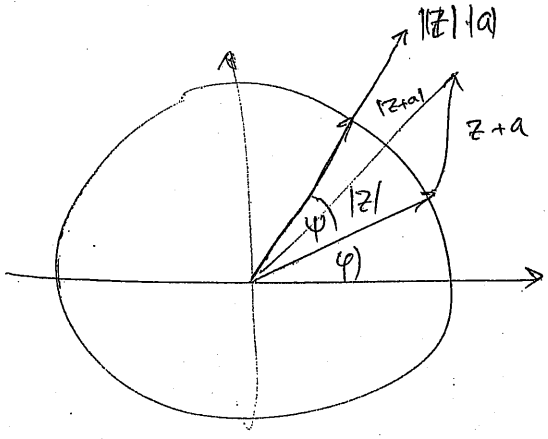
$z \rightarrow a \cdot z$ ротација $(|a| = 1)$

↳ обртна хомотетија $\left(\begin{array}{l} |a| - \text{хом.} \\ \varphi - \text{ротација} \end{array}\right)$

$a = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$|a| = 1$ - ротирамо z за φ

$a \cdot z = R \cdot 1 \cdot (\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi))$



МАТ 4

15.3.2017.

ОСОБИНЕ СТРУКТУРЕ ВЕК. ПРОСТ. из $\mathbb{R}^2$ у $\mathbb{C}$ се преносе директно.

$a \in \mathbb{C}$

$z \to z + a$ транслација за вектор a.

$z \to a \cdot z$

$|a| = 1$ ротација
$|a| < 1$ контракција
$|a| > 1$ издужене

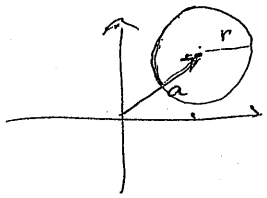
} хомотетија

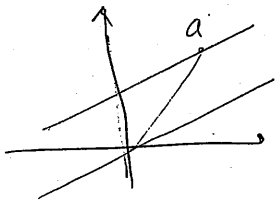
$z, w \in \mathbb{C}$

$d(z,w) = |z-w|$ ← стандардна еуклидска метрика

Ј-НЕ КРУГА, ПРАВЕ:

$|z-a| = r$ ⟶





$\operatorname{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right) = 0$

b – јединствено одређен јединични бр. $\in \mathbb{C}$

ШТА ЋЕМО СА ОКОЛИНОМ од ∞?

$z \to \frac{az+b}{cz+d}$ за $c=0$ $d=1$, добијамо транслацију

БИЛИНЕАРНО ПРЕСЛИКАВАЊЕ

$z \to \frac{1}{\bar{z}}$; $z \neq 0$ ⟶ $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ одређено до на $2k\pi$

ОСТАЈЕ ИСТО φ, тј. ОСТАЈЕ НА ИСТОМ зраку.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{r} = \frac{1}{r}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi$$

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{r}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

ИНВОЛУТИВНО! (АКО ДВАПУТ ПРИМЕНИМО, ВРАЋАМО СЕ НА ПОЧЕТАК)

↳ СИМЕТРИЈА У ОДНОСУ НА КРУЖНИЦУ (ИНВЕРЗИЈА)

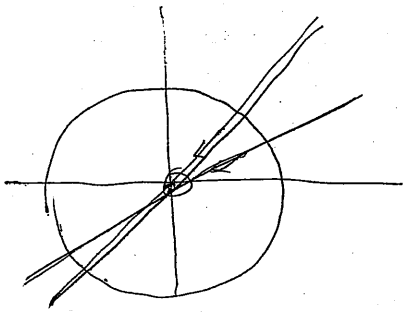
$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{\overline{\frac{1}{z}}} = z.$$

– кружница иде сама у себе
– унутрашњост кружнице иде у спов.
– спов. кружнице иде у унутрашњост.

БИЛИНЕАРНА ПРЕСЛИКАВАЊА → композиције осталих 4 пресликавања већ поменута

СВА ПРЕСЛИКАВАЊА сликају кружнице у кружнице

⇒ Билинеарна прес. исто.



ИДЕЈА ЈЕ ДА У ~~БЕСКОНАЧНО~~ КОМПЛЕКСНОЈ ИМАМО САМО ЈЕДНУ БЕСКОНАЧНОСТ.
(не бесконачно много беск.)

$\mathbb{C}$ и $\{\infty\}$ – проширена комплексна раван

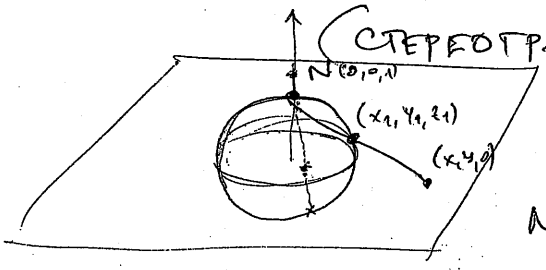
(компактификација у 1 тачку)

Ако се приближавамо ка нули, слика $z \to \frac{1}{\bar{z}}$ иде у ∞

Треба додефинисати инверзију да се $0 \to \infty$ и $\infty \to 0$

ТОПОЛОГИЈА = СКУП ОТВОРЕНИХ СКУПОВА

(СТЕРЕОГРАФСКА ПРОЈЕКЦИЈА)



ДЕФ. Пресликавање са $\mathbb{C}$ равни на сферу. Цртамо праве из N и спајамо са тачкама из равни. Увек има пресек права са сфером. (осим када је права паралелна са равни). Обрнуто, N и било која тачка сфере јединствено одређује праву која јединствено сече раван.

- ТАЧКЕ СА РУБА СЕ СЛИКАЈУ У СЕБЕ
- ТАЧКЕ У ДИСКУ СЕ СЛИКАЈУ НА ДОЊУ СФЕРУ
- ТАЧКЕ ВАН ДИСКА СЕ СЛИКАЈУ НА

ОВО ЈЕ БИЈЕКЦИЈА СФЕРЕ (БЕЗ N) И РАВНИ.

ДОДЕФИНИСАЊЕМ ПРЕСЛИКАВАЊА ТАЧКЕ N, испашће да се слика у $\{\infty\}$.

МАТЧ

15.3.2017

$((1-t)x, (1-t)y, t)$ – параметризација правих ?

$(1-t)^2 \cdot (x^2+y^2) + t^2 = 1 \qquad 0 \le t \le 1$

$(1-t)^2 |z|^2 = (1-t)(1+t)$

~~$t \cdot |z|^2 = 1$~~

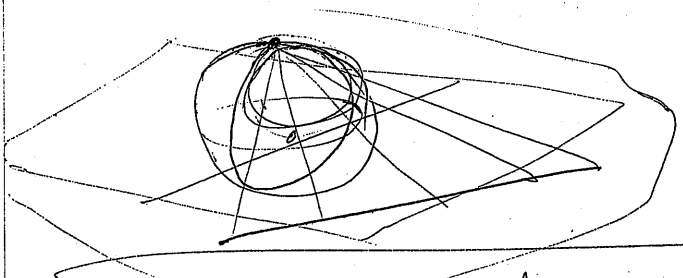
$|z|^2 - t|z|^2 = 1 + t$

$|z|^2 - 1 = t(|z|^2+1) \quad \rightarrow \quad t = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$

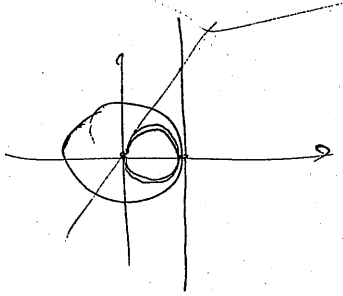
$1 - t = \frac{2}{|z|^2+1}$

$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{2x}{|z|^2+1}, \frac{2y}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) = \left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{z-\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$

$$z = \frac{x_1 + i x_2}{1 - x_3}$$



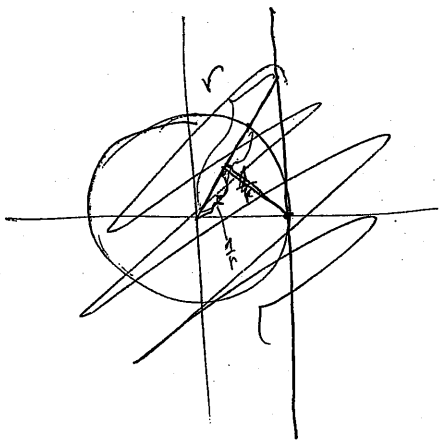
праве из равни $\longleftrightarrow$ кружнице на сфери

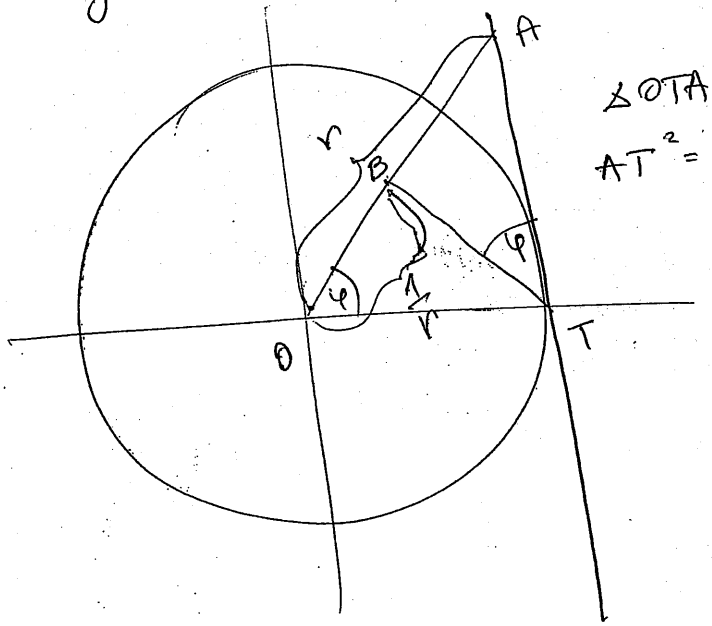


~~Права се шаље~~

Билинеарна пресликавања сликају праве на кружнице и кружнице у праве.

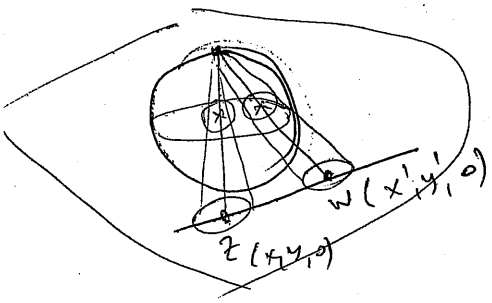
Праве и кружнице гледамо, као ел. истог фамилија.





$\triangle OTA \sim \triangle OTB$

$AT^2 = AB \cdot AO$



$d_S(z,w)$ = нађемо пројекције z и w на сферу и нађемо сферно растојање

сфера

Отворени скупови на сфери и у $\mathbb{C}$ равни су исти, дакле метрике d_S и d генеришу исте отворене скупове (не укључујући N).

$$d_S(z,w) = \frac{2|z-w|}{\left[(1+|z|^2)(1+|w|^2)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

фиксирамо z, пустимо $w \to \infty$, тј. $|w| \to \infty$.

$$d_S(z,w) \sim \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\cdot|w|} \sim \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \quad (|w|\to\infty)$$

права околина бесконачности:

~~скуп од неког $|z|$ све тачке~~

$\nexists M$, т.ј. $\forall |z| > M$ у тој околини U бесконачности

$z \to \infty \Leftrightarrow |z| \to \infty$ по дефиницији праву.

Обе метрике су екв. за све тачке осим N, отуда да укључимо и њу. Дакле има је околина тачке ∞. Узмемо мали круг око N, добијемо конус ка $\mathbb{C}$ равни.

$\Rightarrow$ изводи, $\int$..

МАТ 4

20. 3. 2017.

Уводимо извод и интеграл.

$\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ — треба да нам је деф. домен од f т.д. је деф на некој околини од "a".

непр.

- Уколико постоји $\lim\limits_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ $\Rightarrow$ f је комплексно диференцијабилна у тачки "a".

$z\to a \Leftrightarrow |z-a|\to 0$

- Уколико је диф. $\Rightarrow$ непр. (МАТ 1)
- Извод сложене ф-је (композиција)
- Инверзна; збир; производ скаларом; производ.
- $\lim\limits_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ $\to$ укључује и лимес по правцу. у себи

I $\quad \| \quad f'(a) \in \mathbb{C}$ $\qquad$ I $\supset$ II $\supset$ III

отворен

$f: U \longrightarrow \mathbb{C}$ ако је f диф. на целом U, онда је и f' деф. на целом скупу U.

II Ако је f' непр. $\Rightarrow$ f - холоморфна ф-ја. (пандам непр. диф у $\mathbb{R}$.

III $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overset{\in \mathbb{C}}{a_n} (z-a)^n$ ако је $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \overset{>0}{\leftarrow} R$

$\Rightarrow$ деф. ~~...~~ са радијусом конвергенције R.

$\to$ бесконачно диференцијабилна (увек исто R)

$f: U \to \mathbb{C}$

U ОТВОРЕН, ДА СЕ НЕ МИСЛИМ ДА МИ НЕКА ТОЧКА ИМА ОКОЛИНУ

$z = x + iy$

$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$u = \frac{f+\bar{f}}{2} : U \to \mathbb{R}$ ← РЕАЛНИ ДЕО Ф-ЈЕ f

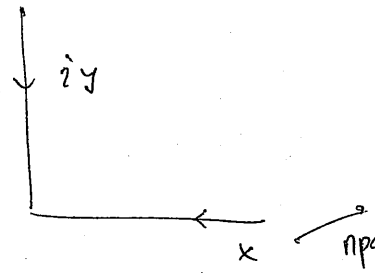
$v = \frac{f-\bar{f}}{2i} : U \to \mathbb{R}$ ← ИМАГИНАРНИ ДЕО Ф-ЈЕ f

$f(z) = u(z) + iv(z) \qquad \overline{u(z)} = u(z)$

$\bar{f}(z) = u(z) - iv(z) \qquad \overline{v(z)} = v(z)$ ← РЕАЛНЕ

f НЕПР. $\iff u, v$ НЕПР.

ТРЕБАЛО БИ ДА ШВЕЈ НЕ ЗАВИСИ ОД ПРАВЦА



$a = a_1 + ia_2$

АКО ЈЕ f КОМПЛЕКСНО ДИФ.

$$\frac{f(x+ia_2) - f(a_1+ia_2)}{x-a_1} =$$

$$= \frac{u(x+ia_2) + iv(x+ia_2) - u(a_1+ia_2) - iv(a_1+ia_2)}{x-a_1}$$

$$= \frac{u(x+ia_2) - u(a_1+ia_2)}{x-a_1} + i\,\frac{v(x+ia_2) - v(a_1+ia_2)}{x-a_1} \longrightarrow$$

$\longrightarrow$ $x \to a_1$ $(z \to a)$ $\quad u'_x + iv'_x$

МАТ4 20.3.2017.

ДУЖ Y-ОСЕ:

$$\frac{1}{i}\lim_{y\to 0}\frac{f(a+iy)-f(a)}{y} = \frac{1}{i}v'_y - iu'_y$$

АКО ЗНАМО ДА СУ $a,b,c,d\in\mathbb{R} \Rightarrow$ ИЗ $a+ib=c+id$
$\Rightarrow a=c$ и $b=d$

ИЗ ДОВИЈЕНОГ, $\underbrace{u'_x, u'_y, v'_x, v'_y}_{\in\mathbb{R}} \Rightarrow$

$u'_x = v'_y$; $v'_x = -u'_y$

НАЧИН ДА ПРОВЕРИМО ДА ЛИ ЈЕ f КОМП. ДИФ.

АКО СУ $u,v\in C^{(2)}(\mathbb{C})$ ← 2 пута непр. диф.

$$\begin{cases} u''_{xx} = v''_{yx}, \\ v''_{xy} = -u''_{yy} \end{cases}$$

(МАТ 2 ШВАРЦОВА ЛЕМА)
комутирање парцијалних

$\boxed{u''_{xx}+u''_{yy}=0}$ $\boxed{v''_{xx}+v''_{yy}=0}$

Δu лапласијан → u – ХАРМОНИЈСКА

ДА БИ f БИЛО КОМП. ДИФ, u и v морају бити хармонијске

....

КОШИ – РИМАЊОВИ УСЛОВИ (C-R)

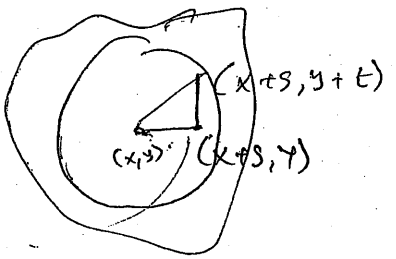
~~ДА ЛИ СУ ТИ УСЛОВ~~

НЕКА ЈЕ f холоморфна, тада u, v задовољавају (C-R) услове:

ПИТАЊЕ ЈЕ ДИ ЛИ u и v ИМАЈУ КОМПЛЕКСНИ ИНВЕРЗ ?????

(x,y) — ФИКСНА ТАЧКА

$f: U \to \mathbb{C}$



ДА НЕ ИЗАЂЕМО ИЗ ОБЛАСТИ ЗАТО ЈЕ КРУГ

$$u(x+s, y+t) - u(x,y) =$$

$x+s$ ФИКСНО y ШЕТА

$$= u(x+s, y+t) - u(x+s, y) +$$

$x+$ ШЕТА y — ФИКСНО

$$+ u(x+s, y) - u(x,y) =$$

ЛАГРАНЖ ЗА ФЈ 1 ПРОМЕЊИВЕ

$$= u'_y(x,y)\cdot t + u'_x(x,y)\cdot s + o\left(\sqrt{t^2+s^2}\right)$$

$(x+s, y+\theta t)$ ...

ОВО МОЖЕ ЈЕР СМО ПРЕТПОСТАВИЛИ ДА СУ u'_y и u'_x НЕПР.

$$f(z) - f(a) = u(x+s, y+t) + i v(x+s, y+t) - u(x,y) - i v(x,y) =$$

$$= u'_y t + \underline{u'_x s} + \underline{i v'_y t} + i v'_x \cdot s + o\left(\sqrt{s^2+t^2}\right)$$

АКО f задовољава (C-R)

$$\Rightarrow u'_x = v'_y$$

$$\Rightarrow = \underbrace{u'_y t}_{i^2 v'_x t} + u'_x \overset{z-a}{\overset{\parallel}{(s+it)}} + \underline{i v'_x} \cdot s + o(\ldots \qquad v'_y = -v'_x$$

$$= u'_x(s+it) + i v'_x(s+it) + o(\sqrt{\ })$$

$$= (u'_x + i v'_x)(s+it) + o\left(\sqrt{s^2+t^2}\right)$$

АКО СУ ИЗВОДИ НЕПР. (II)

$$\boxed{\frac{f(z) - f(a)}{z-a} = u'_x + i v'_x} + \frac{o\left(\sqrt{s^2+t^2}\right)}{z-a} \to 0$$

$z-a$

НАЧИ, АКО СУ ИЗВОДИ НЕПР (C-R) $\Rightarrow$ ДА ЈЕ f КОМПЛЕКСНО ДИФ.

ХОЛОМОРФНА $\Longleftrightarrow$ $(C-R)$

МАТ4
20.3.2017.

γ: ДЕО-ПО-ДЕО $C^{(1)}$
КРИВА

$f: u+iv$ $\quad dz = dx+idy$

ХОЛОМОРФНА
⇓
НЕПРЕКИДНА
⇓
u, v – НЕПР.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \Big[(u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy)\Big]$$

ИЗ МАТ 2 ⇒ ∃ ови интеграли

(ОВО ЈЕ И МОГЛО БЕЗ ХОЛОМОРФНОСТИ)

ОВО НЕ НАМ БИТИ ДЕФ. ИНТЕГРАЛА (ПОЗИВАМО СЕ НА КОМПЛЕКСНОТ НА МАТ 2)

ИНТ. ЈЕ ДЕФ. КАДА СУ ДЕФ. ОВА ДВА ИНТЕГРАЛА

АЛИ, ЗА ГРИНА НАМ ТРЕБА НЕПРЕКИДНОСТ ИЗВОДА

(*) **ГРИН:** $f: U \to \mathbb{C}$ $\quad U$ – отворен, повезан
ХОЛОМОРФНО

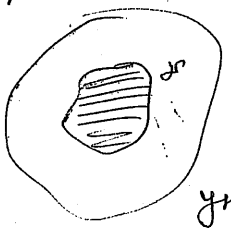
$(C-R)$ $\gamma \subset U$

$$\int_\gamma u\,dx - v\,dy = \iint_D (-v'_x - u'_y)\,dx\,dy \overset{III}{=} 0$$

$$\int_\gamma v\,dx + u\,dy = \iint_D (u'_x - v'_y)\,dx\,dy \overset{III}{=} 0 \quad (C-R)$$

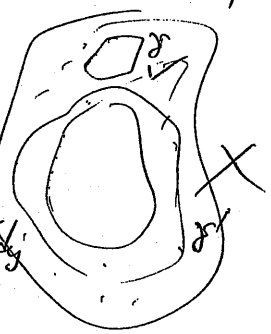
$$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma f(z)\,dz = 0}$$

Интеграл по затвореној кривој је нула!



Битно да унутар криве нема проблематичну тачака, зато повезаност треба

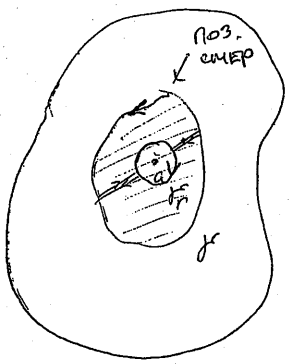
ГРИН
$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$
=
$\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy$



мала модификација:

$U \to \mathbb{C}$ али има тачка "a" у U

$$\frac{f(z)}{z-a}$$



γ_r – нег. смер.

кад $r \to 0$

кад $z \to a$

$f(z) \to f(a)$

па је довољно

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0$$

$f(a)\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-a}$?

$a_n = \frac{1}{n!}$ радијус $R = \infty$

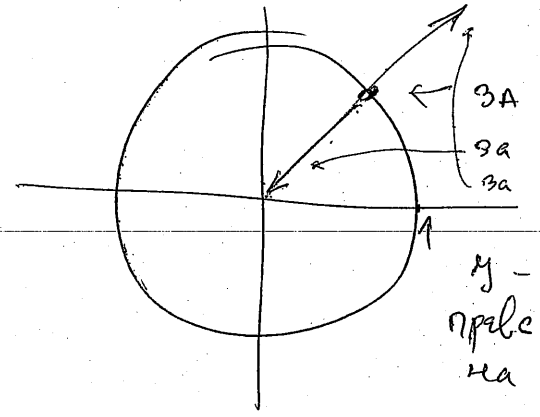
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$ добро деф за $\forall z \in \mathbb{C}$

Ако је $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^z = e^x$

Ако је $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$ $\to$ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^{2k+1}(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}$

$$\boxed{e^{iy} = \cos y + i \sin y}$$

$$e^z = e^{x+iz} = e^x \underbrace{(\cos y + i \sin y)}_{\text{модуо} = 1}$$



за $x = 0$

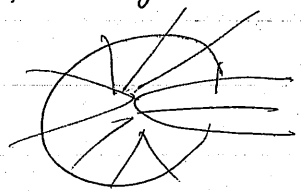
за $x \to -\infty$

за $x \to \infty$

y – намотава праве парал. x-оси на кружнице.

$e^z \to$ сликање декартовог система у поларни

$0 \le y < 2\pi$
$x \in \mathbb{R}$



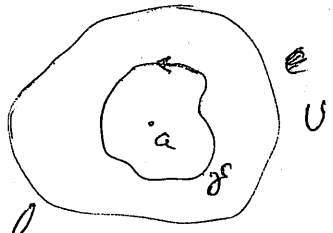
МАТ4

22. 3. 2017.

РЕЗИМЕ: $\int_\gamma f(z)dz = 0$ по затвореној γ која обухвата област у којој је $f(z)$ аналитична.

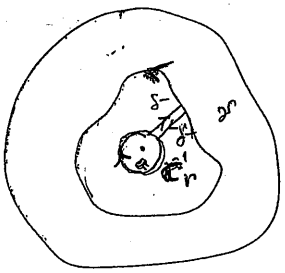
Ако је φ-ја проблематична у тачки $z=a$.

$\frac{f(z)}{z-a}$



$\boxed{\begin{array}{c} f - \text{холоморфна} \\ \Downarrow \\ f - \text{НЕПРЕКИДНА} \end{array}}$

аналитичка свуда унутар γ, осим у "a".



$\int_{\gamma \cup C_r' \cup \delta^+ \cup \delta^-} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0 \Rightarrow \cancel{\int_\gamma f(z)dz} + \int_{\delta^+} + \int_{\delta^-} = 0$

$\Downarrow$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz + \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 0$$

$C_r \to$ супротна оријентација од γ

$$\boxed{\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz = \int_{-C_r} \frac{f(z)}{z-a} dz}$$

иста оријентација

СМЕНА: $z = a + r \cdot e^{it}$

$t \in [0, 2\pi)$ $\quad |e^{it}| = 1$

$\hookrightarrow$ z ће једном обићи нашу кружницу.

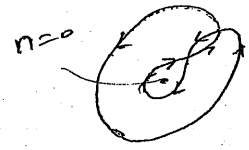
$dz = r i e^{it} \cdot dt$

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{it})}{\cancel{re^{it}}} \cancel{r} i \cancel{e^{it}} \cdot dt = i \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) dt \qquad r \to 0$$

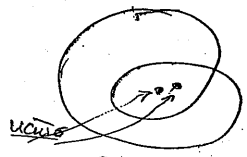
очекујемо да ће $\left| i\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})dt - i\int_0^{2\pi} f(a)dt \right| \leq$ мало!

$$\leq \int_0^{2\pi} \overbrace{|f(a+re^{it}) - f(a)|}^{<\varepsilon \text{ за } r<\delta} dt < \varepsilon \int_0^{2\pi} dt = \varepsilon \cdot 2\pi \qquad \cancel{(\forall r<\delta)}$$

$$\boxed{f(a) = \frac{n(a,\gamma)}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz}$$



$n(a,\gamma) \to$ број пута колико крива γ обилази тачку a.



$n(a,\gamma)$ је ~~исто~~ const. по компонентама повезаности.

Да не бисмо компликовали, (T) ћемо дефинисати за просте криве (без самопресецања) т.д се не бавимо индексима n.

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\cdot dz}$$

$f = u + iv$

(T) о интегралној ф-ји

Коши – риманови услови

$f(z)$ – холоморфна $\Leftrightarrow$ $\boxed{u'_x = v'_y \;;\; u'_y = -v'_x}$

посматрајмо $f(z)$, као ф-ју од $f(z,\bar z)$

$f'_{\bar z} = ?$ $\quad f'_z = u'_z + i v'_z \quad x = \frac{z+\bar z}{2} \quad y = \frac{z-\bar z}{2i}$

$$f'_{\bar z} = u'_{\bar z} + i v'_{\bar z} =$$

$$= u'_x \cdot x'_{\bar z} + u'_y\, y'_{\bar z} + i v'_x \cdot x'_{\bar z} + i v'_y \cdot y'_{\bar z} =$$

$$= u'_x \cdot \frac{1}{2} + u'_y \cdot \frac{i}{2} + i\left(v'_x \frac{1}{2} + v'_y \frac{i}{2}\right)$$

$$= \frac{u'_x - v'_y}{2} + i\cdot\frac{u'_y + v'_x}{2} = 0$$

Ако $f(z)$ посматрамо као ф-ју од (x,y), можемо да пређемо на то да је $f(z,\bar z)$ (2 паре координате)

дакле, уколико је f аналитичка, она не зависи од $z, \bar z$. $\boxed{\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0} \Longrightarrow f(z)$ – холоморфна

Лакше да радимо са $z, \bar z$, ако (2) нам је дато $f(x,y)$.

МАТ4

22.3.2017

комплексну раван можемо гледати ~~к~~ као 1D $\Rightarrow f(z)$ или као у 2D $\Rightarrow f(x,y)$ али можемо <u>сменом</u> свести $f(x,y)$ на $f(z,\bar{z})$.

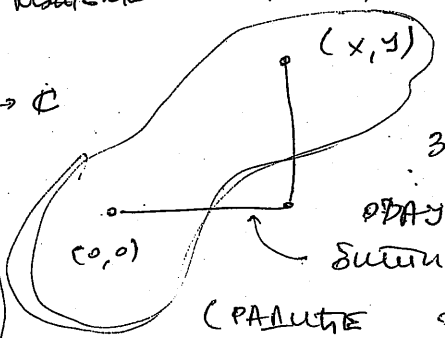
$$\boxed{x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}}$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

γ – без самопресецања једном обилази "a" у смеру супротном од казаљке на сату.

имамо u, да ли можемо наћи v, т.д $u+iv$ аналитичка

$$\left.\begin{aligned} u'_x &= v'_y \\ u'_y &= -v'_x \end{aligned}\right\} \quad u: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$



ЗА ОПШТУ ОБЛАСТ, ОВАЈ НАЧИН МОЖЕ БИТИ ПРОБЛЕМАТИЧАН (РАДИЋЕ ЗА КОНВЕКСНЕ ОБЛАСТИ: раван, диск.)

ако имамо v које одговара, онда ће $v + const$ исто задовољавати

$\Rightarrow$ имамо ∞ много решења.

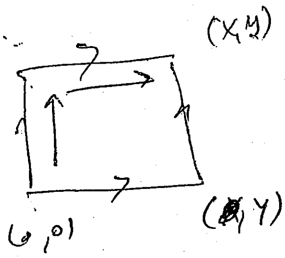
Преко те константе можемо обезбедити произвољну вредност у одређеној тачки v.

$$v(x,y) - v(0,0) = \underbrace{v(x,y) - v(0,y)}_{\text{ф-ја по } x} + \underbrace{v(0,y) - v(0,0)}_{\text{ф-ја по } y} =$$

ОВДЕ РАДИ ЛАГРАНЖ

$$= \int_0^x v'_x(t,y)\,dt + \int_0^y u'_x(0,t)\,dt =$$

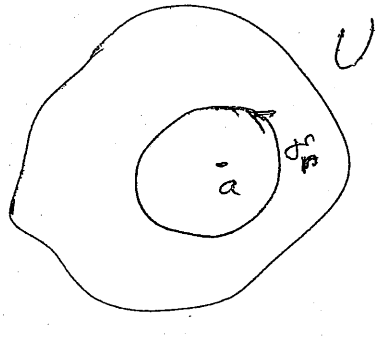
$$= -\int_0^x u'_y(t,y)\,dt + \int_0^y u'_x(0,t)\,dt + C$$



из $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ → ~~ДА~~ ~~Ј~~Е НЕБИТАН пут, можемо ићи путањом која је унутар области.

(I) ⇔ II ⇔ III

Да ли можемо ако је II (холоморфне) да развијемо у ред?



U - отворена

⇒ постоји диск γ_r који обухвата тачку $z = a$,

γ_r - поз. оријентација.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

← ово важи за $\forall r > 0$ т.д. $\gamma_r \subset U$.

нека је $|w-a| = r$ ј-на кружнице

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

$|w-a| = r$

$|w-r| \le r$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{(w-a)-(z-a)} = \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{z-a}{w-a}\right)} \quad \left(\frac{z-a}{w-a}\right) < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad \text{за } \forall\ |x| < 1$$

ДАКЛЕ ово ~~можемо~~ развити у ред.

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \quad \forall z \in \text{диска } |w-a| = r$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)\cdot(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\,dw$$

$f \in \text{II} \Rightarrow$ огр. је на кружница

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(w)\cdot(z-a)^n}{(w-a)^{n+1}}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw\right)}(z-a)^n\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-a)^n$$

$a_n \to$ не зависи од z.

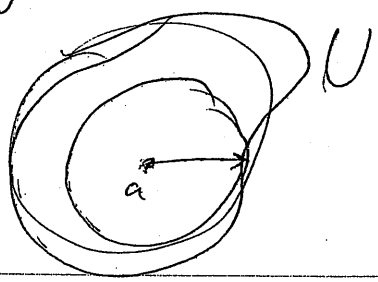
Исти су за $\forall z$ из унутрашњости кружнице

Добили смо да ако узмемо круг $\subseteq$ у U, онда имамо развој за $\forall z$ из кружнице.

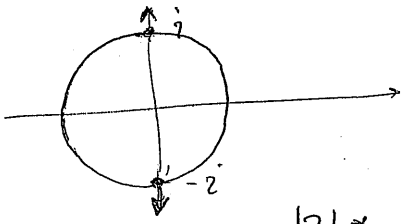
(f је холоморфна)

Радијус конвергенције од f је растојање

$d(a, \partial U)$



$\frac{1}{1+z^2}$



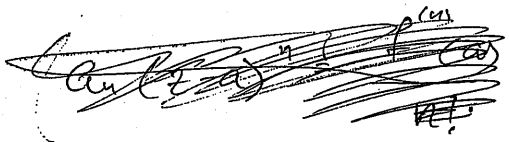
зашто ово не ради за $|z| \geq 1$, јер је проблем у $-i$ и i.

Доказали смо $\boxed{II} \subseteq \boxed{III}$

холоморфна $\Leftrightarrow$ аналитичка $\Leftrightarrow$ ∞ диф.

Показаћемо и $\boxed{I} \subseteq \boxed{II}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$



$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(w-z)^{n+1}} dw$$

γ – проста крива!

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

МАТ4 27. 3. 2017.

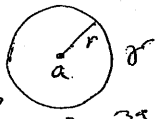
$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

$$dz = \sqrt{dx^2+dy^2}$$

$$\int_\gamma dz = 2\pi\cdot r$$

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \le \frac{n!}{2\pi}\int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-a|^{n+1}}\,|dz|$$

$|z-a|^{n+1} \to r^{n+1}$



ШТА АКО ЈЕ $f(z)$ ограничено: (f огр. на области аналитичности)

тј. $\exists M \ \forall\ |f(z)| \le M$

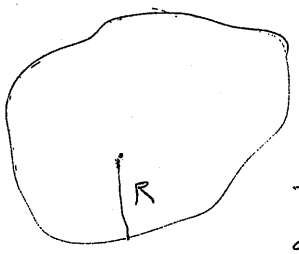
битно да сваки ~~кр~~ кружић који је унутар области дефинисаљ

рада за

$$\le \frac{n!}{\cancel{2\pi}}\cdot M\cdot\frac{1}{r^{n\cancel{+1}}}\cdot \cancel{2\pi}\cdot\cancel{r} = \boxed{\frac{n!\,M}{r^n}}$$ — КОШИЈЕВА ПРОЦЕНА

ДА ДОБИЈЕМО НАЈБОЉУ ПРОЦЕНУ, УЗИМАМО max r, тј. растојање тачке a од руба области аналитичности.

R - радијус аналитичности?



ДАКЛЕ ВАЖИ ЗА $\forall\ r < R$

ДА ЛИ ВАЖИ И ЗА R?

Да! Јер можемо пустити да $r \to R^-$.

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = a_n \leftarrow \text{процена коеф. развоја}$$

$$|a_n| \le \frac{M}{R^n}\ ; \quad |f(a)| \le M$$

$$|f'(a)| \le \frac{M}{R}$$

$p(z) = \overset{\in\mathbb{C}}{a_n} z^n + \dots + a_0$ ← разлаже се на производ лин. чланова.

$\in \mathbb{C}[x]$ ← комплексни коеф.

$\mathbb{C}$ — поље!

$p(z) = (z-\alpha)q(z) + \cancel{\beta}^{\,0}$ ако је $p(\alpha) = 0$

$w = \overline{w} \iff w \in \mathbb{R}$

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$

$p(w) = 0 = a_n w^n + \dots + a_0$

$p(\overline{w}) = \overline{0} = 0 = \overline{a_n w^n + \dots + a_0} = \overline{a_n}(\overline{w})^n + \dots + \overline{a_0} = a_n(\overline{w})^n + \dots + a_0$

ЈЕ СУ $a_n, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \overline{a_k} = a_k$

АКО ЈЕ w НУЛА ОД $p(x) \Rightarrow \overline{w}$ НУЛА ОД $p(x)$ (1)

$(z-w)(z-\overline{w}) = z^2 - 2\,\mathrm{Re}\,w + |w|^2$ $\quad / \; p(x) \in \mathbb{R}[x]$

$p(z) = \overset{\neq 0}{a_n} z^n + \dots + a_0$ ← n-тог степена полином $\in \mathbb{C}[x]$

$p(z) = \underset{\neq 0}{a_n} \cdot (z-\alpha_1)^{n_1} \cdots (z-\alpha_k)^{n_k}$ $\quad n_1 + \dots + n_k = n$

$\alpha_1, \dots, \alpha_k$

$z \to \infty$, тозна чи да $|z| > R > 0$

$$|p(z)| \geq |a_n| |z|^n - |a_{n-1} \cdot R^{n-1} + \dots + a_0| \geq$$

$$\geq |a_n| \cdot R^n - (|a_{n-1}| \cdot R^{n-1} + \dots + |a_0|) =$$

$$= |a_n| \cdot R^n \boxed{\cdot \left[1 - \left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n| \cdot R} + \dots + \frac{|a_0|}{|a_n| R^n} \right) \right]} \geq \frac{1}{2}$$

const.

када је R довољно велико, $(R \geq R_0)$, можемо гарантовати да је (*) $\geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow |p(z)| \geq \frac{|a_n|}{2} \cdot R^n \xrightarrow[R \to \infty]{} \infty \quad (n \geq 1)$$

за $n = 0$ ⇒ const

у бесконачности, полином степена n тежи ка ∞.

⇒ МОЖЕМО ГАРАНТОВАТИ ДА ЈЕ ЗА НЕКУ const. ПОЛИНОМ ВАН ТОГ РАДИЈУСА ВЕЋИ ОД НЕКЕ КОНСТАНТЕ. (МОДУО ПОЛИНОМА ЈЕ ОГРАНИЧЕН ОДОЗДО).

⇒ Ако $p(x)$ има нуле ⇒ СЕ ОНЕ НАЛАЗЕ УНУТАР НЕКОГ КРУГА ЧИЈИ ПРЕЧНИК $\propto |a_n|$

Т. Ако $p(x)$ нема нуле ⇒ $p(z) \geq \underset{\text{const.}}{C} > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\forall z \in \mathbb{C} \quad \left| \frac{1}{p(z)} \right| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{1}{C} = M \Rightarrow \frac{1}{p(z)}$ – аналитичка у $\mathbb{C}$

$\left(\frac{1}{p(z)} \in H(\mathbb{C}) \right)$

ЦЕЛА ФЈА У СМИСЛУ АНАЛИТИЧКА НА ЦЕЛОМ $\mathbb{C}$.

МАТ 4

22. 3. 2017.

$\frac{1}{p(z)} \in H(\mathbb{C})$

$\exists M$ ш.д $\left|\frac{1}{p(z)}\right| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$

(Хоћемо да развијемо $\frac{1}{p(z)}$ око било које тачке?)

$$\left|\left(\frac{1}{p(z)}\right)^{(n)}(0)\right| \leq \frac{n! M}{r^n} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow = 0$

ДАКЛЕ, ВРЕДНОСТ СВИХ ИЗВОДА У НУЛИ ЈЕ НУЛА.

РАЗВОЈ У РЕД ЈЕ КОНСТАНТА.

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \quad \frac{1}{p(z)} = \frac{1}{p(0)} = \text{const.} \Rightarrow p(z) = \text{const}$ ↯

ЈЕР СМО УЗЕЛИ ДА ЈЕ $p(z)$ ПОЛИНОМ МАКАР ПРВОГ СТЕПЕНА.

$\Rightarrow$ СВАКИ ПОЛИНОМ СТЕПЕНА $n \geq 1$ ИМА МАКАР ЈЕДНУ НУЛУ.

Т АКО ЈЕ $f \in H(\mathbb{C})$ (аналитичка у целој $\mathbb{C}$) И ОГРАНИЧЕНА ($\exists M \forall z \in \mathbb{C} \; |f(z)| \leq M$)

(ЛИУВИЛ)

$\Rightarrow_{(n\geq 1)} f = \text{const.}$ (НА ОСНОВУ ПРЕТХОДНОГ)

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{M}{r^n} \to 0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = 0$$

* Шта нам треба да знамо о аналитичкој ф-ји да бисмо је реконструисали? Треба нам пребројиво много података.

Ако је ф-ја аналитичка у тачки ⇒ има развој у ред у тој тачки. Анал. и инт. степена реда не мења радијус конвергенције.

исти радијус конв.

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(z-a)^n$$

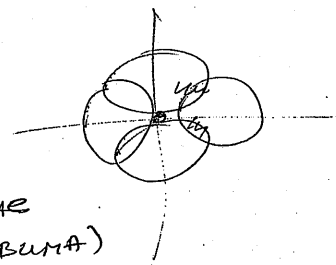
$$F(z)=F(a)+\sum_{n=0} a_n\cdot\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1} \qquad \sqrt[n]{\frac{a_n}{n+1}}\to\sqrt[n]{a_n}\to R$$

$F'(z)=f(z)$ локално имамо егзистенцију примитивне ф-је (акс. у области аналитичности)

За глобално аналитичке имамо ли глобалну примитивну?

$u(x,y)=\ln|z|=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ ← дефинисана у $\mathbb{C}\setminus\{0,0\}$

да ли је и хармонијска?



код хармонијских смо тражили да су 2 пута непр. диф. (али више и под блажим условима)

$$u'_x=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$u''_{xx}=\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u''_{yy}=\frac{-y^2+x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

— свуда ван $(0,0)$ (важи ово)

$$\Rightarrow u''_{xx}+u''_{yy}=0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$$

из (C-R) ⇒ $v'_y=\frac{x}{x^2+y^2}$ $\quad v'_x=\frac{-y}{x^2+y^2}$

$v=?$ $\quad v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C(x)\to v'_x=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+C'(x)$

$\Rightarrow C'(x)=0$

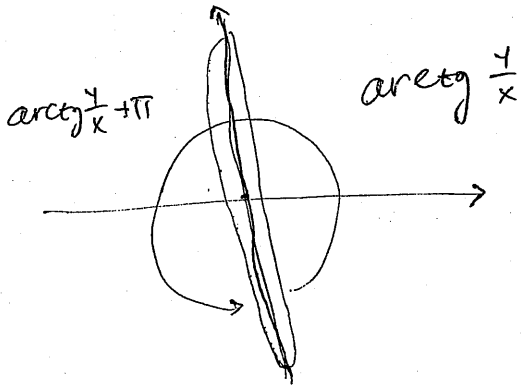
$$\Rightarrow v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C$$

(4)

МАТЧ

27-3.2017.

$$\vartheta(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C$$



локално постоян

хармонически непр.,

не мора глобално.

МАТ4 — 29.3.2017.

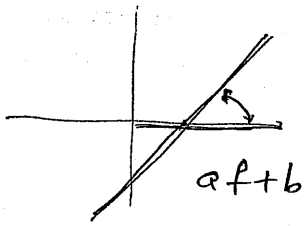
$f: D \to \mathbb{C}$

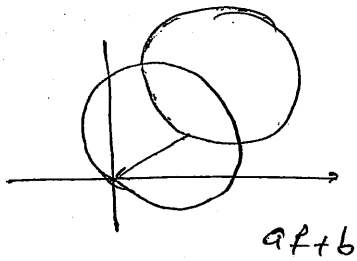
$f(D) \subseteq \mathbb{R}$

$u'_x = v'_y = 0$

$u'_y = -v'_x = 0$

АКО ЈЕ СЛИКА Ф-ЈЕ САДРЖНАТА У ПРАВОЈ ИЛИ КРУЖНИЦИ, ОНДА ЈЕ $f = \text{const}$.





ЗА ПАМЋЕЊЕ Ф-ЈЕ (АНАЛИТИЧКЕ) НАМ ТРЕБА ПРЕВРОЧВО МНОГО ПОДАТАКА.

$f: D \to \mathbb{C}$ ~~D - повезан~~ D – диск.

D – област аналитичности

(А) $f \equiv 0$

(Б) $\exists a \in D, \quad f^{(n)}(a) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

(В) $\{z \in D \mid f(z) = 0\}$ ИМА ТАЧКУ НАГОМИЛАВАЊА У УНУТРАШЊОСТИ D, НА РУБУ ОД D НЕМАМО АНАЛИТИЧНОСТИ.

(Т) (А) $\Leftrightarrow$ (Б) $\Leftrightarrow$ (В).

Доказ: (А) $\Rightarrow$ Б $\wedge$ (А) $\Rightarrow$ (В) ТРИВИЈАЛНО

ПР. $\cos\frac{1+z}{1-z}$

$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \longrightarrow e^{2x} = -1 \quad |e^{2x}| = 1 \to |e^{2x}| = 1$

$\Rightarrow \times \Leftarrow$

$\Rightarrow e^z = \cos y + i \sin y = -1 + i \cdot 0$

$y = (2k+1)\pi$

$e^{iz} = -1$

$\frac{1+z}{1-z} = w$

$1 + z = w - wz$

$z(1+w) = w - 1$

$z = \frac{w-1}{w+1} = \frac{(k+\frac{1}{2})\pi i - 1}{(k+\frac{1}{2})\pi i + 1} \longrightarrow 1$

~~$k \to \infty$~~ $k \to \pm\infty$

$z \to 1$ ВАН области аналитичности.

$k \in \mathbb{Z}$

(Б) ~~ако је~~ $\exists a \in D,\ f^{(n)}(a) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}_0$

око a постоје кружићи где важи $\Rightarrow$ у кружићима је нула ф-ја $\Rightarrow$ (А)

(В) $a \in D$ + тачка нагомилавања 0

$f(a) = 0$

$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$

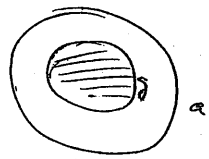
$f^{(n)}(a) \neq 0$

$$f(z) = a_n \cdot (z-a)^n + a_{n+1} \cdot (z-a)^{n+1} + \dots$$

$$= (z-a)^n \underbrace{\left(a_n + \cancel{a_{n+1}(z-a) + \dots} + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n} \right)}_{\text{аналитичка ф-ја } g(z)}$$

$f(z) = (z-a)^n \cdot g(z)$

$g(a) \neq 0 \rightarrow g(z) \neq 0 \quad |z-a| < \delta$



$\Rightarrow$ сви изводи $f^{(n)}(a) = 0$ ↯

ПОСЛЕДИЦА: НУЛЕ АНАЛИТИЧКЕ ф-је од изоловане (т.д $f \not\equiv 0$) поредак нуле $\in \mathbb{N}$

постоји ред ф-је ~~...~~ n – ред нуле

$f, g : D \to \mathbb{C}$

$\{z \mid f(z) = g(z)\}$ ИМА ТАЧКУ НАГОМИЛАВАЊА У D

$\Rightarrow f(z) \equiv g(z)$ ТЕОРЕМА ЈЕДИНОСТИ.

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a}\, dz \longrightarrow z = a + re^{it} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt, \quad u(a) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\gamma_r} u(a + re^{it})\, dt$$

МАТ 4 — 29.3.2017.

1. НУЛЕ ХАРМОНИЈСКЕ Ф-ЈЕ НИКАДА НИСУ ИЗОЛОВАНЕ.
2. АНАЛИТИЧКЕ Ф-ЈЕ КОЈЕ НИСУ $\equiv 0$, НУЛЕ СУ ИЗОЛОВАНЕ.

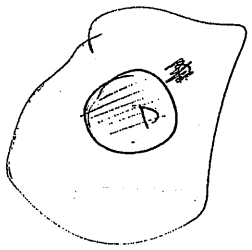
1 и 2 НИСУ У КОНТРАДИКЦИЈИ, АЛИ $U(x)$ и $V(x)$ НИСУ ~~ЗАЈЕДНО~~ истовремено НУЛЕ) ВЕЋ ВАРИРА (ИАКО ОБЕ ИМАЈУ БЕСКОНАЧНО МНОГО НУЛА).

ТРАЖИМО ~~МАКС.~~ ЕКСТРЕМУМЕ ОД f; ГЛЕДАЋЕМО ЗА $|f|$

(T) $f: D \to \mathbb{C}$, $a \in D$, $|f(a)| \geq |f(z)| \quad \forall z \in D$

(D отворен) $\Rightarrow f \equiv \text{const.}$

(T) МАКС. МОДУЛА



$f \in H(\overline{D})$

$|f|$

АКО $|f(a)|$ max $\Rightarrow \frac{1}{|f(a)|}$ мин

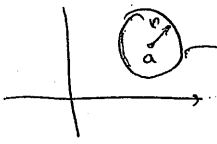
а то ↑ АНАЛИТИЧКА

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a+re^{it})|\, dt$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a)|\, dt \qquad 0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[|f(a+re^{it})| - |f(a)| \right] dt$$

≤ 0

C – константа



по сваком кругићу $|f|$ је const.

ТАКО ЈЕ ЗА СВАКИ КРУГ, $\Rightarrow$ НА ЦЕЛОМ ДИСКУ $|f|$ const.

$f: D_r \to \mathbb{C}$ $\quad f(D_r) \in$ кругница

$\Rightarrow$ за max $|f|$ довољно испитивати на руби D.

γ - затворена крива.

$a \notin \gamma$ $\qquad$ $z \in \gamma,\ a \notin \gamma \Rightarrow z - a \neq 0$

$$\mathrm{Ind}_{(a,\gamma)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$$

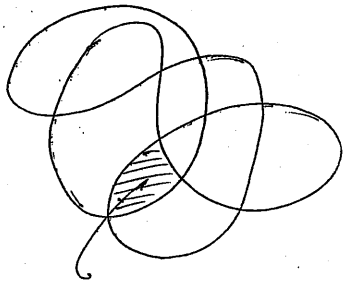
$$\boxed{\gamma:\ a + re^{it},\quad 0 \le t \le 2n\pi,\ n \in \mathbb{N}}$$

→ кружница са центром у a полупречника r, коју обилазимо n пута у позитивном смеру.

$$\frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int \frac{1}{\cancel{r}\cancel{e^{it}}}\, \cancel{i}\cancel{r}\cancel{e^{it}}\, dt = n.$$

Да ли је γ затворена крива

$$\cancel{a} + \cancel{r}\underbrace{e^{i0}}_{=1} = \cancel{a} + \cancel{r}\underbrace{e^{i2n\pi}}_{=1} \checkmark$$



Ind исти у целој компоненти - повезаности

МАТ 4

3.4.2017

$$\mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-a} =$$

$\mathbb{C}$: ДЕКАРТОВЕ → ПОЛАРНЕ

$$f(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-a}\,ds$$

НЕПР.

$0 \le t \le 1$

γ - нешрекидно диф.

γ - ЗАТВОРЕНА $\Leftrightarrow \gamma(0) = \gamma(1)$

$a \notin \gamma$.

$f(0) = 0$

$f(1) = 0$ АКО ЈЕ ЗАТВОРЕНА КРИВА

$$\boxed{f'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}} \quad ; \quad \left(e^{-f(t)}\cdot(\gamma(t)-a)\right)' = e^{-f(t)}\cdot\gamma'(t) - e^{-f(t)}\cdot\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a}(\gamma(t)-a) =$$

$$= \boxed{0} \quad \forall t \in (0,1)$$

$f(t)$ - ДИФ. НА $(0,1)$

- НЕПР. НА $[0,1]$

ДЕФ. $\Leftrightarrow$ $f(t) = \text{const.}$ НА $[0,1]$

$$e^{-f(0)}(\gamma(0)-a) = e^{-f(1)}\cdot(\gamma(1)-a)$$

$\|$

1

$f(1) = 2n\pi i \quad , n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{f(1)}{2\pi i} = n \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z-a} \in \mathbb{Z}$$

ЛЕМА

~~ДВА~~ ДОКАЗАЛИ СМО ДА ЈЕ Ind НЕКО БРОЈ, ПРЕДСТАВЉА ОРИЈЕНТИСАНИ БРОЈ ОБИЛАЗАКА ОКО ТАЧКЕ a ПО КРИВОЈ γ.

СВОЈСТВА - γ - КРИВА НЕГАТИВНО ОРИЈЕНТИСАНА

(1) $\mathrm{Ind}(\gamma, a) = -\mathrm{Ind}(-\gamma, a)$ ДОК: НАПРАВИМО СМЕНУ $-\gamma$ У ПОМ. Ј-НИ.

~~ДОК~~ (2) $\mathrm{Ind}(\gamma \cup \sigma, a) = \mathrm{Ind}(\gamma, a) + \mathrm{Ind}(\sigma, a)$; $\boxed{a \notin \gamma, \sigma}$

ДОК: ПАРАМЕТРИЗУЈЕМО 0 ДО $\frac{1}{2}$ И $\frac{1}{2}$ ДО 1

БИТНО ДА НАСТАВИМО У НАЈОЈ ТАЧКИ, МОЖЕМО ДА НАСТАВЉАМО КРИВЕ.

Слика γ не сме бити компакт. (затворена ограничена)

Раван $\mathbb{C}\setminus\{\gamma\}$ не садржи ∞, дати отворен, састављена од компонената повезаности.

(А) унутар једне компоненте повезаности, a, b у истој.

$\Rightarrow \operatorname{Ind}(\gamma, a) = \operatorname{Ind}(\gamma, b)$

(Б) a у спољ. повезаности којој припада ∞.

$\Rightarrow \operatorname{Ind}(\gamma, a) = 0.$

Док: (А): $\left| \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-b} \right| \leq$ $\in \mathbb{Z} \Rightarrow$ довољно да обезбедимо да је $|\,| < 1$ или $\frac{1}{2}$ или било шта...

$\leq \frac{1}{2\pi}\left| \int_\gamma \left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right) dz \right| =$

$= \frac{1}{2\pi}\left| \int_\gamma \frac{a-b}{(z-a)(z-b)}\, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|a-b|}{|(z-a)(z-b)|} |dz|$ $\sqrt{dx^2+dy^2}$

→ треба ово проценити

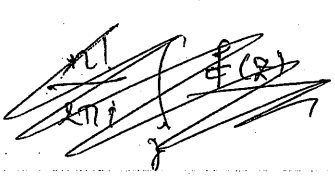
$a \in \gamma \Rightarrow$ растојање од a до γ је позитивно ($\delta > 0$)

$|z-a| \geq \delta$ $\quad |z-b| \geq \frac{\delta}{2}$ бирамо b из круга око a пол. $\frac{\delta}{2}$.

$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\ell(\gamma)}{\delta \cdot \frac{\delta}{2}} |a-b|$ ← дужина криве

(Б) аналогно, $b \to \infty$, ... $\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R-|a|}\, \ell(\gamma)$

$\int \frac{dz}{(z-a)^{k+1}}$ – може да се разбија уред. $a_{-1}(z-a)^{-1} + a_0 + a_1(z-a) + \dots$



$$f(a)\cdot \operatorname{Ind}(\gamma, a) = \oint \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

$$\operatorname{Ind}(\gamma, a)\cdot f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\cdot dz$$

МАТ 4

(МОРЕРА)

~~4.3.2017~~

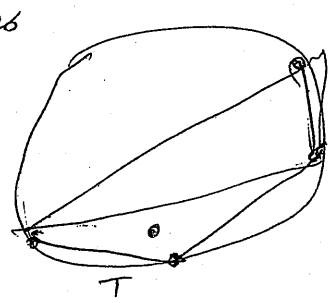
3.4.2017

(T)

$\boxed{f\text{ - непр.}}$

$f: D \to \mathbb{C}$ D - отворено

$\int_{\boxed{\gamma}} f(z)\,dz = 0$

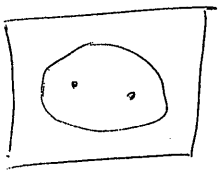


~~Битно к~~

ЖЕЛИМО ДА ДЕФ. ПРИМИТИВНУ Ф-ЈУ.

ТО МОЖЕМО УРАДИТИ И ЗА РУПИЧАСТУ ОБЛАСТ, ЈЕР АКО ИЗДЕЛИМО ОБЛАСТ НА ТРОУГЛОВЕ. ОНДА ЋЕ ТРОУГАО ДА ЗАОБИЂЕ РУПУ.

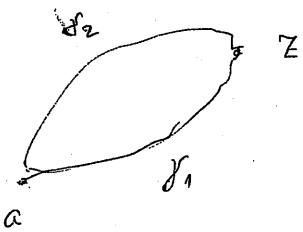
АКО ЈЕ ИНТЕГРАЛ ПО ПРОИЗВОЉНОМ ТРОУГЛУ $= 0 \Rightarrow f$ АНАЛИТИЧНА



АКО ЈЕ ИНТЕГРАЛ ПО ПРОИЗВОЉНОМ $\Delta = 0$, ОНДА ЈЕ СМИСЛЕНО ДЕФ. Ф-ЈУ.

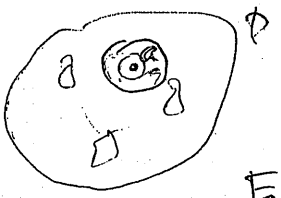
$$F(z) = \int_{\gamma} f(w)\,dw$$

$a \quad z$



$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} = 0$ (исцрпкамо на Δ) $\to \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$

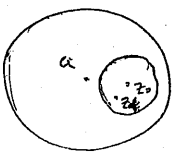
ЦИЉ ЈЕ ПОКАЗАТИ ДА F ИМА КОМПЛЕКСНИ ИЗВОД И ДА ЈЕ ОН БАШ f. F ЋЕ БИТИ ХОЛОМОРФНА, f-НЕПР. $\Rightarrow F$ ЈЕ ∞ ДИФ.



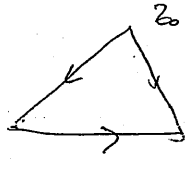
D - отворен, $\Rightarrow$ "a" има околину

локално посматрамо $F(z) = \int_{[a,z]} f(w)\,dw$

$F(z_0) = \int_{[a,z_0]} f(w)\,dw$, $F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(w)\,dw \quad / \cdot (z - z_0)$



$\frac{1}{z - z_0} \int_{[z_0,z]} f(w)\,dw$



$\leftarrow$ интеграл по $\Delta = 0$.

$$\left|\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} f(w)\,dw - f(z_0)\right| = \left| f(z_0)\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} 1\cdot dw = \frac{z-z_0}{z-z_0}\cdot f(z_0)\right.$$

дужина дужи

$$= \left|\frac{1}{z-z_0}\int_{[z_0,z]} [f(w)-f(z_0)]\,dw\right| = \leq \frac{1}{|z-z_0|}\cdot\varepsilon\int_{[z_0,z]}|dw| = \varepsilon$$

↳ из непрекидности f-а ово је произвољно мало

$\Rightarrow$ $F' = f$ и F холоморфна.

Доказали смо $I \Leftrightarrow II \Leftarrow III$ $\Rightarrow$

остало још $I \Rightarrow II$

Ако $\exists f'$, $f: D \to \mathbb{C}$, $\Rightarrow$ f' - непр. (холоморфна)

довољно је показати да је интеграл по било ком троуглу $= 0$. (ГУРСА)

$$\int_T f(z)\,dz = 0$$

(не може троугао да иде преко проблематичне тачке).

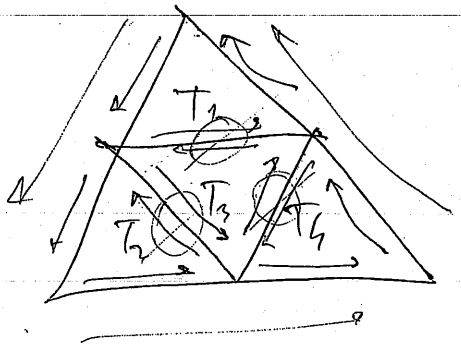
f' локално својство, $\int_T f$ глобално својство.

Сецкамо троугао на мање т.д. сведемо на мале.

обим $O(T_i) = \frac{1}{2}O(T)$

површина $P(T_i) = \frac{1}{4}P(T)$

Диаметар: $\operatorname{diam}(T_i) = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(T)$



$$\int_T = \int_{T_1} + \int_{T_2} + \int_{T_3} + \int_{T_4} \quad \text{ниј.} \quad \int_T f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{4}\int_{T_i} f(z)\,dz$$

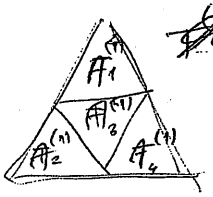
МАТЬ 3.4.2017

$$\boxed{\left|\int_T f(z)\,dz\right|} \leftarrow$$ процењујемо одозго (знамо да је >0)

$$= \left|\sum_{i=1}^{4}\int_{T_i} f(z)\,dz\right| \le \sum_{i=1}^{4} \overbrace{\left|\int_{T_i} f(z)\,dz\right|}^{\le 0} \le$$ процењимо одозго, постоји највећи $T_i = T^{(1)}$

$$\le 4\cdot\left|\int_{T^{(1)}} f(z)\,dz\right| =$$

понављамо поступак, изделимо $T^{(1)}$ на 4 Δ средњим линијама.



$O(A_1) = \frac{1}{2} O(T^{(1)})$

$P(A_1) = \frac{1}{4} O(T^{(1)})$

$\operatorname{diam}(A_1) = \frac{1}{2} O(T^{(1)})$

$$= 4\cdot\left|\sum_{i=1}^{4}\int_{A_i} f(z)\,dz\right| \le$$

$$\le 4\cdot\sum_{i=1}^{4}\left|\int_{A_i} f(z)\,dz\right| \le \underbrace{4\cdot 4}_{4^2}\cdot\left|\int_{T^{(2)}} f(z)\,dz\right|$$

max ел A_i

поново исти поступак ...

$$O(T^{(n)}) = \frac{1}{2^n}\cdot O(T)$$

$$\operatorname{diam}(T^{(n)}) = \frac{1}{2^n}\cdot\operatorname{diam}(T)$$

имамо низ уметнутих троуглова, диам $\to 0$, $\Rightarrow$ по Кантору, пресек уметнутих Δ је непразан и представља једну тачку.

$$\left|\int_T f(z)\,dz\right| \le 4^n\cdot\left|\int_{T^{(n)}} f(z)\,dz\right| =$$

$$= \int_{a \to z} f(w)\,dw$$

f – диф.

$$\bigcap T^{(n)} = \{z_0\} \qquad \left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)\cdot(z-z_0)\right| < \varepsilon$$

$$4^n \left| \int_{T^{(n)}} \left[\underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{< \varepsilon} - f'(z_0) \right] \underbrace{(z - z_0)}_{< \frac{1}{2^n} \operatorname{diam}(T)} \, dz \right| \leq \quad < \frac{1}{2^n} O(T)$$

$$\leq 4^n \varepsilon \cdot \frac{1}{2^n} \operatorname{diam}(T) \cdot \frac{1}{2^n} O(T) = \varepsilon \cdot \underbrace{\operatorname{diam}(T) \cdot O(T)}_{\text{const}}$$

$\boxtimes$

MAT4 5.4.2017

f – аналитичка у области која садржи γ и унутрашњост γ

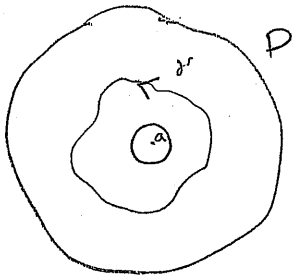
$\log f \longrightarrow$ извод би био $\frac{f'}{f}$

$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ да ли је $\frac{f'}{f}$ аналитичка?

посматрајмо шта је са нулом фје

- Ако f нема нуле, онда је интеграл $= 0$.
- Ако $f \equiv 0$ онда не можемо питати! БЕСМИСЛЕНО
- Ако f има нулу: Ако није изолована, онда $f \equiv 0$ (Т јединости)

$\Rightarrow$ Нуле од f су изоловане



$$f(z) = (z-a)^m \cdot g(z) \in H(B(a,r))$$

$f(a) = 0 \qquad g(a) \neq 0$

$$f'(z) = m(z-a)^{m-1}\cdot g(z) + (z-a)^m g'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m(z-a)^{m-1}\cdot g(z) + (z-a)^m \cdot g'(z)}{(z-a)^m g(z)} = \frac{}{}$$

$$= \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

i) ШТА АКО f има тачно једну нулу (само "a")?

Тада је $\frac{g'(z)}{g(z)}$ – добро дефинисано?

и $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = m \leftarrow$ даје ред нуле фје f

ii) Ако имамо 2 нуле од f на D:

$$(z-a)\cdot(z-b)\,g(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-a} + \frac{1}{z-b} + \frac{g'(z)}{g(z)} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz \rightarrow$$ даје број нула од f у D, рачунајући вишеструкости нуле.

(за контурисање криве треба да се урачуна и Ind криве)

γ — затворена ⇒ ограничава компактну област

ако има ∞ нула ⇒ има тачка нагом.

⇒ (Т) јединствени) $f \equiv 0$ ↯

⇒ има коначно много нула.

$$f(z) = (z-a_1)^{m_1} \cdots (z-a_k)^{m_k} g(z)$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{m_1}{z-a_1} + \dots + \frac{m_k}{z-a_k} + \frac{g'}{g} \quad \Big/ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \cdot \, dz$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = m_1 + \dots + m_k$$

(+ Ind ако γ више пута обилази неку тачку.)

---

* водимо рачуна о Index-у (тачке ван γ имају Ind = 0, па их не рачунамо)
* рачунамо вишеструкост нуле ф-је.

Ако нас интересује колико пута f узме неки бр. α:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-\alpha}\,dz = \text{тражени бр.} \qquad \alpha = \text{const.}$$

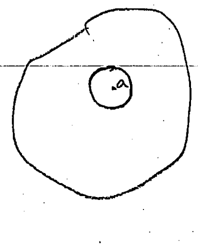
Ако f анал. ⇒ $f-\alpha$ анал

ПОСЛЕДИЦЕ: (све што ради за $f(z)=0$ ради и за $f(z)=\alpha$)

Нека је $f: D \to \mathbb{C}$ аналитичка на D, $f \not\equiv \alpha$, $f(a) = \alpha$, $\alpha = \text{const}$, $a \in D$

$m \geq 1$ ← ред нуле $z = a$.

$\exists \varepsilon$ т.д. $0 < |z-a| < \varepsilon$ ← у овом кружићу без центра (punctured disk)



на овом (пробушеном) диску f нема другим речима

$f(z) \neq \alpha \qquad f(a) = \alpha$

МАТ4 5.4.2017.

Ако је нула вишеструка, онда је то нула и од f' ... опет нешто преко (T) јединости да f' нема других нула...

Мало мењање α не би требало да мења интеграл.

$|w-\alpha|<\delta \to f(z)=w \to$ исти бр. решења (уз вишеструкости) $\int \in \mathbb{Z}$

у кружићу око α.

унутар нашег кружића $f-\alpha$ нема нула $\Rightarrow$ ни $(f-\alpha)'$ нема нула $\Rightarrow$ $(f-w)'$ нема нула, па нема вишеструких нула. $\Rightarrow$ има само m једноструких нула!?

СПЕЦИЈАЛНО: $f: D \to \mathbb{C}$ отворен

$\not\equiv$ const. $\alpha \in f(D)$ $f(z)-\alpha=0$ има решење

КАДА нађемо одг. ε и δ, за $|\alpha-w|<\delta \to f(z)-w=0$ има реш.

$\Rightarrow f(D) \to$ отворен скуп

за сваку тачку у слици имамо и да нека њена околина у слици

Аналитичка ф-ја слика отворен скуп у отворене скупове!

$f(D)$ - отворен

$f: D \to \mathbb{C}$ отворен

$\not\equiv$ const. и 1-1

да буде деф. инверз

$\exists f^{-1}: f(D) \to D$

$\to$ слика отворене у отворене

$\Rightarrow f^{-1}$ непрекидна.

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n (z-a)^n}$$

← пок. да не бити и за $\mathbb{Z}$

$|z-a| < R_1$

$$\left(\frac{1}{z-a}\right)^n, \quad \frac{1}{|z-a|} < \alpha_2 \quad \to \quad |z-a| > \frac{1}{\alpha_2} = R_2$$

када је уместо $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, уместо диска добијемо простен

(лоранов ред)

ТРЕБА НАМ НЕШТО КОНТРА од изоловане нуле.

$f: D\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ $\quad$ a - изоловани сингуларитет од f.

↓ АНАЛИТИЧКА

I) АКО ЈЕ ОТКЛОЊИВ СИНГ.

$\exists g: D \to \mathbb{C}$ аналитичка + $g|_{D\setminus\{a\}} \equiv f$

можемо да додефинишемо ф-ју у тачки a.

II) $\lim\limits_{z\to a} |f(z)| = \infty$ ову ситуацију зовемо ПОЛ

III) АКО НИЈЕ I ни II, ОНДА ЈЕ $\boxed{\text{БИТАН СИНГУЛАРИТЕТ}}$ ← ЕСЕНЦИЈАЛАН СИНГУЛАРИТЕТ

ТО АКО f нема $\lim$, тр. има више тачака нагом

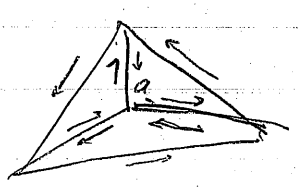
1) ~~АКО ЈЕ~~ ОТКЛОЊИВ СИНГ $\Leftarrow \lim\limits_{z\to a} (z-a) f(z) = 0$ + a - изолован синг.

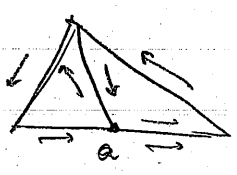
2) $h: D \to \mathbb{C}$ $\begin{cases} h(z) = (z-a)^2 \cdot f(z) \\ D\setminus\{a\} \\ + \\ h(a) = 0 \end{cases}$

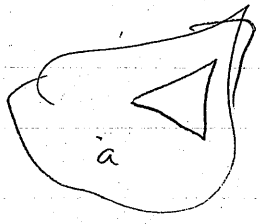
h анал. на $D\setminus\{a\}$

непр. на D

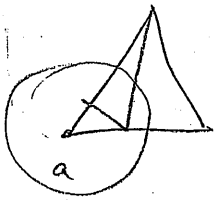
из МОРЕРЕ довољно је да $\int$ на $\Delta = 0$







МАТ 4 5.4.2017



$$\left|\int_{T_\delta} h(z)\,dz\right| \le \int_{T_\delta} |h(z)|\,|dz| \le \text{const}\cdot\varepsilon$$

$$\left.\begin{array}{l} h \text{ анал. на } D\setminus\{a\} \\ h \text{ непр. на } D \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} h: D\to\mathbb{C} \\ \text{АНАЛ. НА } D \end{array}$$

$$\cancel{a_0}^{\,0} + a_1(z-a)+\dots$$

$g(z)$ – аналитичка на D

$h(z) = (z-a)f(z)$

$h(z) = (z-a)g(z)$

g деф. и у "a"

g се подудара са f на $D\setminus\{a\}$

g анал. продужење од f.

$$\boxed{\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0 \iff a \text{ – отклоњива сингуларитет.}}$$

продужавамо по непрекидности.

I) отклоњив. има $\mathbb{N}_0$ индексе у реду

II) пол има коначно много негативних индекса

III) има ∞ много негативних индекса развоја

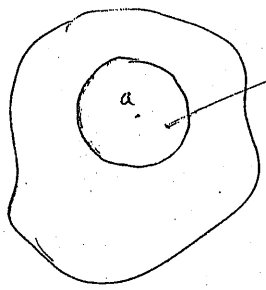
МАТ4 10.4.2017.

отклоњиве синг. → допунимо f по непрекидности, ни не гледамо к'о синг.

$(z-a)f(z) \xrightarrow[z \to a]{} 0$

Пол: f аналитичка на $D \setminus \{a\}$: $f \in H(D \setminus \{a\})$

$|f(z)| \xrightarrow[z \to a]{} \infty$ a — коначна тачка, треба пазити, због ∞.



$g(z) = \frac{1}{f(z)} \in B(a,r) \setminus \{a\}$

$0 < |z-a| < r$

може да се каже кругић т.д. $f(z) \neq 0$

Може да се додеф. $g(a) = 0$.

$g \in H(B(a,r))$

$m \in \mathbb{N}$, $g_1(z)$ — анал. + $g_1(a) \neq 0$

$g(z) = (z-a)^m \cdot g_1(z)$

$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m g_1(z)} = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$ — нема дељења нулом, коректно је деф.; $h(z) = \frac{1}{g_1(z)}$

$h(z) = b_0 + b_1(z-a) + \dots$

$f(z) = \frac{b_0}{(z-a)^m} + \frac{b_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots$ ($b_0 = a_{-m}$, $b_1 = a_{-(m-1)}$)

$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-a)^k$

$\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k (z-a)^k$

$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ $\left(\frac{1}{z-a}\right)^{-k}$ w

$R_1 < |z-a| < R_2$

АНАЛИТИЧКА НА ДИСКУ ⇒ ИМА РАЗВОЈ У ТЕЈЛОРА

Ф-ЈА АНАЛИТИЧКА НА прстену

СПЕЦ: $0 \leq |z-a| < R$

Пол: АКО РАЗВОЈ ИМА КОНАЧНО МНОГО НЕГ. ИНДЕКСА; пол реда m.

~~ЛОРАН~~

$\sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-a)^k \leftarrow \left(k \in \mathbb{Z} \; \begin{matrix} k < 0 \\ k < -m \end{matrix}\right)$

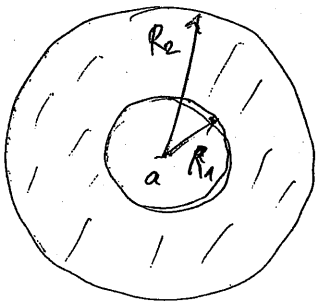
ЛОРАНОВ РАЗВОЈ

отклоњив — $k \in \mathbb{N}_0$

пол — $k \in \mathbb{Z}$, $k < -m$, $a_k = 0$ — коначно много негативних

ЕСЕНЦИЈАЛНИ.

~~специјални~~? — ∞ негативних



$R_1 < |z-a| < R_2$

треба да ради и за $R_1 = 0$.

ТВРЂЕЊЕ: $f(z)$ се може приказати као:

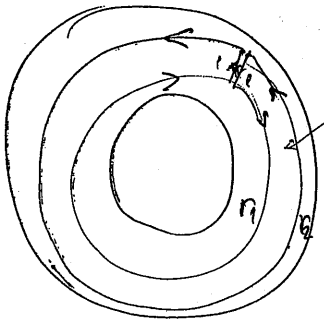
$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z-a)^k$$ ← овај ред конв на претену

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} \cdot dz$$

γ_r — кривал која иде кроз претен и једном обиђе, "a". супротно од казаљке.

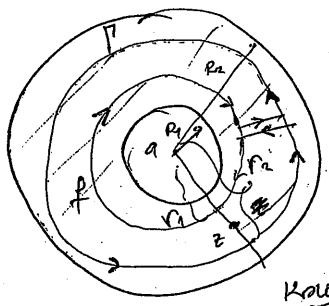
γ_r: $a + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

$R_1 < r < R_2$



$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \ell} = \int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} = 0 \to \int_{\gamma_1} = \int_{\gamma_2}$$

⇒ исто за било које r код γ_r.



f — анал. на диску

не знамо да ли је f анал на R_1 и R_2, па узмемо r_1 и r_2.

кошијева интегрална формула:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z)} dw$$ ✓ — тачно једном супротно од казаљке обилазимо z.

Γ — унија 4 криве. Ове две прове се потру.

$$(w-a)(-(z-a)) \qquad \frac{1}{w-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{w-a}}$$

$R_1 < r_1 < |z-a| < r_2 < R_2$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{w-z}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-a)-(z-a)}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-a)-(z-a)}\,dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{z-a}\cdot\frac{1}{\frac{w-a}{z-a}-1}\,dw \Big/ \frac{-1}{-1}$$

Циљ да буду по модулу мањи од 1.

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-a}{w-a}}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{w-a}{z-a}}\,dw$$

Развијамо у ред геом. прогресија

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{w-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n dw + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{z-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n dw$$

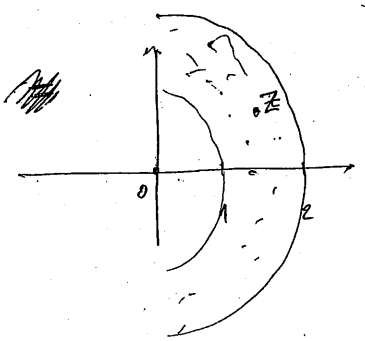
$$= \text{———————} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} f(w)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\,dw$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw\right](z-a)^n +$$

$$+ \sum_{m=-\infty}^{-1}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(w)}{(w-a)^{m+1}}\,dw\right](z-a)^m$$

$n = -m-1$

Не зависи од r, можемо ставити исто r на оба



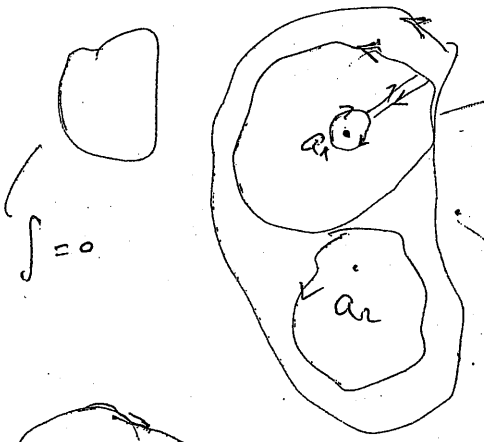
$$\frac{1}{(1-z)(2-z)}$$

$f \in H(\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, a_3\})$ → изоловане проблематичне тачке, тј. сингуларитети. ?

ако би било ∞ проблематичних тачака у области уоквиреној са γ, онда они имају тачку нагомилавања, па нису изоловане.

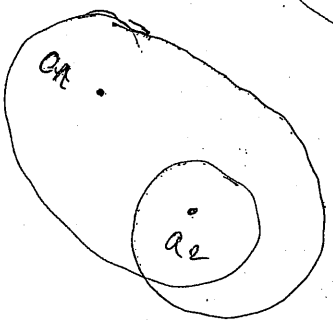
a изолована : $\exists r > 0$ т.д $B(a, r)$ не садржи друге проблематичне тачке

МЕРОМОРФНО



$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \frac{\cancel{\ }}{2\pi i}$ · нека вредност придружена ~~...~~ a_1

$\mathrm{Ind} = 0$ ЈЕР ЈЕ ВАН



→ КАД ЈЕ КОМПЛИКОВАНИЈА КРИВА ;

$$\sum 2\pi i \cdot \mathrm{Ind}(a_i, \gamma) \cdot \mathrm{Res}(f, a_i)$$

RESIDUE – РЕЗИДУУМ

$z = a + re^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} (z-a)^m\,dz} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} r^m e^{imt}\, r i e^{it}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} r^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t}\,dt = \frac{1}{2\pi} r^{m+1}\left(\int_0^{2\pi} \cos(m+1)t\,dt + i\sin(m+1)t\,dt\right)$$

$\boxed{= 0}$ за $\boxed{m \neq -1}$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq -1 \\ 1, & m = -1 \end{cases}$$

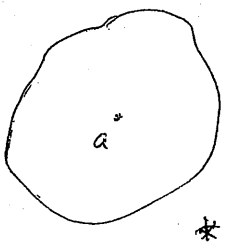
$\boxed{\text{за } m = -1 : \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} = 1}$

$\int \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z-a)^n = 2\pi i\, a_{-1}$ ⇒ ~~Res~~ $\mathrm{Res}(f, a_i) =$ ~~...~~ -1-ви коефицијент

$(z-a)\cdot\left(f(z)\cdot\frac{a_{-1}}{z-a} + \underbrace{a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots}_{\to 0}\right)$ $\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z)$ – пол I РЕДА

МАТ4 12.4.2017.

$f: D\setminus\{a\} \to \mathbb{C}$



a – пол $\qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n$

$Res(f,a)=?$

* Ако је "a" пол првог реда:

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = \lim_{z\to a} \frac{a_{-1}}{\cancel{z-a}}\cancel{z-a} + g(z)\cancel{(z-a)}^{0} = a_{-1} = Res(f,a)$$

* Ако је "a" пол. n-тог реда:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + g(z) \quad \to \text{деф на диску} \setminus \{a\}$$

$\lim_{z\to a} (z-a)^m f(z)$ – аналитичка

→ добијамо a_{-m}, а ми хоћемо a_{-1}

Диференцирамо:

$$(z-a)^m f(z) = \underbrace{a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-a) + \dots}_{\text{диференцирамо } m-1 \text{ пута}} + a_{-1}(z-a)^{m-1} + \overbrace{a_0(z-a)^m + \dots}^{g(z)(z-a)^m}$$

остаће $(z-a)^{\text{позити}} \xrightarrow[z\to a]{} 0$

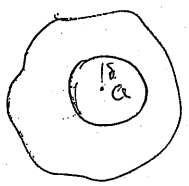
Помножимо $f(z)$ са $(z-a)^m$, па нађемо $(m-1)$-ви извод.

$$\boxed{\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}\left[(z-a)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}}}$$

$P(z), Q(z)$, за $z=a$: $P(a)\neq 0$, $Q(a)=0$ – нула I реда ($Q'(z)\neq 0$)

$$(z-a)\cdot\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{\frac{Q(z)}{z-a}} = \frac{P(z)}{\frac{Q(z)-\overset{0}{Q(a)}}{z-a}} \to \frac{P(z)}{Q'(z)} = Res\left(\frac{P}{Q}, a\right)$$

$z=a$ – есенцијални (изолован) сингуларитет.



$0<\delta'<\delta$

$f(\{z \mid 0<|z-a|<\delta'\})$

$\{f(z) \mid 0<|z-a|<\delta'\} = \mathbb{C}$

$z\neq a$

затворење од $\{\}$ је $\mathbb{C}$

(ВЕЛИКА ПИКАРОВА (T))

(КАСОРАТИ - ВАЈЕРШТРАСОВА ЛЕМА)

Доказ:

П.П. ~~ДА~~ затворење g { } није $\mathbb{C}$.

значи да постоји тачка $w \in \mathbb{C}$ т.д.

$\forall z \in D \quad |f(z) - w| > \varepsilon$

$\left| \frac{1}{f(z) - w} \right| \le \frac{1}{\varepsilon}$ (коректно деф. на $\{ f(z) \mid 0 < |z-a| < \delta' \}$)

$\frac{f(z) - w}{z - a} = g(z) \xrightarrow[z \to a]{} \infty$

$\Rightarrow$ ~~ДА~~ ЈЕ $z = a$ пол. $\Rightarrow$ има коначно $m \in \mathbb{N}$

$(z-a)^k \cdot g(z) \xrightarrow[z \to a]{} 0$ за довољно велико k ($k > m$)

$|(z-a)^m \cdot (f(z) - w)| \xrightarrow[z \to a]{} 0$

$0 \le |f(z)| \cdot |z-a|^m$

$0 \le |f(z) - w + w| \, |z-a|^m \le |f(z) - w| \, |z-a|^m + |w| \cdot |z-a|^m$

($|w| \cdot |z-a|^m \xrightarrow[z \to a]{} 0$, $m \in \mathbb{N}$; $|f(z) - w| \, |z-a|^m \xrightarrow[z \to a]{} 0$ (из овог од малопре))

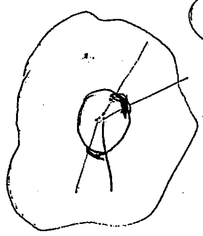
$\Rightarrow |f(z)| \cdot |z-a|^m \xrightarrow[z \to a]{} 0$

значи ~~ДА~~ ЈЕ за ф-ју $f(z)(z-a)^{m-1} \cdot (z-a) \to 0$

(отклоњиви сингуларитет макс реда $m-1$ ↯)

(2)

MATH 12.4.2017.

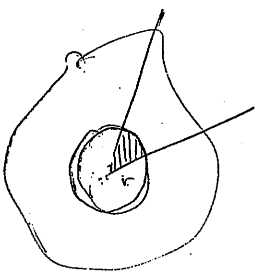


(I) $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2\pi$

кружни без тачке

општи услови:

1) f непр. на $S = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z-a| < r,\ \alpha_1 \leq \arg(z-a) \leq \alpha_2 \}$



2) $\lim_{\substack{z \to a \\ z \in S}} (z-a) f(z) = 0$

хотемо да деф. $\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = 0$

$\gamma_r : a + re^{it}$

$\alpha_1 \leq t \leq \alpha_2$

$0 < r < R$

$$0 \leq \left| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(a+re^{it})\, r i e^{it}\, dt \right| \leq$$

$$\leq M_r\, |z-a| \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \xrightarrow[z \to a]{} 0$$

$M_r = \sup_{z \in \gamma_r} |f(z)|$

(II)

f: аналитичка на $D \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$, a пол I реда

(ЖОРДАНОВЕ ЛЕМЕ)

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\gamma_r} f(z)\,dz = i(\alpha_2 - \alpha_1)\,\mathrm{Res}(f,a) =$$

($= 2\pi i\, \mathrm{Res}(f,a)$ ако је γ_r цео круг)

$\mathrm{Res}(f,a) = a_{-1}$

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + g(z) \;;$$

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + g(z)$$

$$= \lim_{r \to 0^+} \int_{\gamma_r} \frac{a_{-1}}{z-a}\,dz \quad (3)$$

$$a_{-1} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-a} = a_{-1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{i r e^{it}}{r e^{it}}\,dt = a_{-1} i (\alpha_2 - \alpha_1)$$

(III) $f \in C\{t \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$

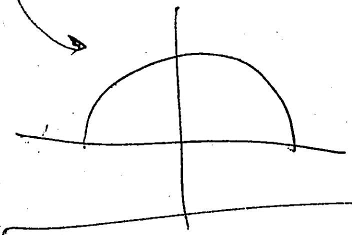
$\gamma_r = R \cdot e^{it}$

$|f| \to 0$

$|z| \to \infty$ $\alpha > 0$ $0 \leq t \leq \pi$

на $\operatorname{Im} z \geq 0$

ДЕО ГОРЕ



$\int_{\gamma_r} f(z)\, e^{i\alpha z}\, dz$ ← занима нас шта се дешава са њим

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, e^{i\alpha z}\, dz = 0$$

МАТ4

18.4.2017

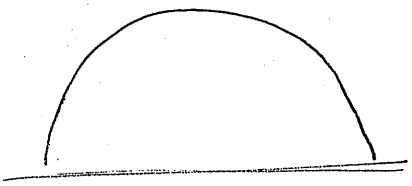
Код 1. и 2. јеме: ГУСТИНА СЕ РАСПОРЕЂУЈЕ РАВНОМЕРНО

(3)

$f \in C\{z \mid \operatorname{Im} z \geq 0\}$, $\alpha > 0$, $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, e^{i\alpha z}\, dz = 0$$

УМИРУЈЕ ПОНАШАЊЕ (НЕ ТЕЊИ f ВАЉА БРЗО НУЛИ)



$$\left| \int_0^{\pi} f(re^{it}) \cdot e^{i\alpha r e^{it}} \cdot ire^{it}\, dt \right| \leq \int_0^{\pi} |f(re^{it})| \cdot r \cdot e^{-\alpha r \sin t} \cdot dt \leq$$

$e^{i\alpha r(\cos t + i\sin t)} = e^{-\alpha r \sin t + i\alpha r \cos t}$

произвољно мало

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ — смена $\pi - t$

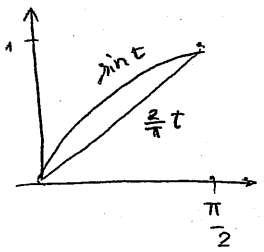
$$\leq 2 \cdot \varepsilon \cdot r \cdot \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha r \sin t} \cdot dt \leq$$

$$\leq 2\varepsilon r \cdot \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha r \cdot \frac{2}{\pi} t} \cdot dt \leq$$

ЈА ВИЂЕ ЈАКШЕ

$$\leq 2\varepsilon r \int_0^{\infty} e^{-\alpha r \frac{2}{\pi} t}\, dt \leq$$

$$\leq 2\varepsilon r \left[-\frac{\pi}{2\alpha r} e^{-\alpha r \frac{2}{\pi} t} \right]_0^{\infty} \leq 2 \frac{\pi}{2\alpha} \cdot \varepsilon = \frac{\pi}{\alpha} \cdot \varepsilon \quad \checkmark$$



$\frac{2}{\pi} t \leq \sin t$

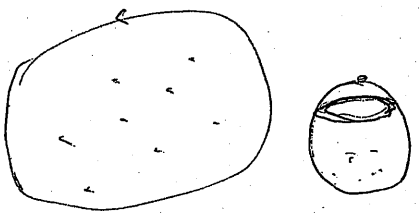
процена одозго

(4) $f \in C\{z \mid |z-a| \geq r_0,\ \alpha_1 \leq \arg(z-a) \leq \alpha_2\}$

$\lim_{z\to\infty} |z-a|\, f(z) = b$

$$\lim_{z\to\infty} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = ib(\alpha_2 - \alpha_1)$$

(Док. по 1 или 2.)



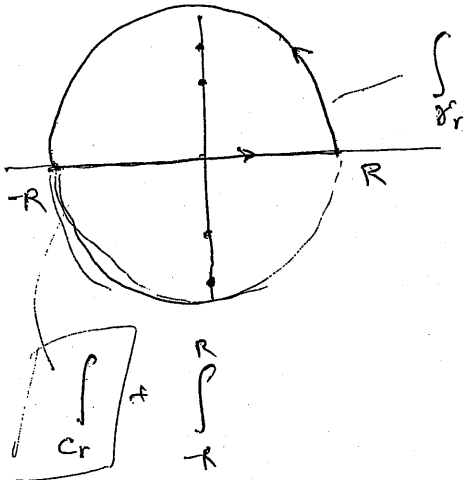
$\operatorname{Res}(f, \infty) = \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right)$

Пр. $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+9)(x^2+4)^2}\,dx = \frac{\pi}{200}$ да ли је аналитичка?

јесте, са сингуларитетима у тачкама $\infty, \pm 3i, \pm 2i$

$$\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2} = \frac{z^2}{(z-3i)(z+3i)(z+2i)^2(z-2i)^2}$$

↑ пол I реда — ↑ пол II реда



$$\int_{\gamma_r} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(f, 2i) + \operatorname{Res}(f, 3i) \right).$$

$$\lim_{z\to a} (z-a) f(z)$$

$$\lim_{z\to 3i} (z-3i) f(z)$$

$$\int_{C_r} + \int_{-R}^{R}$$

$R \to \infty$ $\int_{-\infty}^{\infty}$ – тражени интеграл:

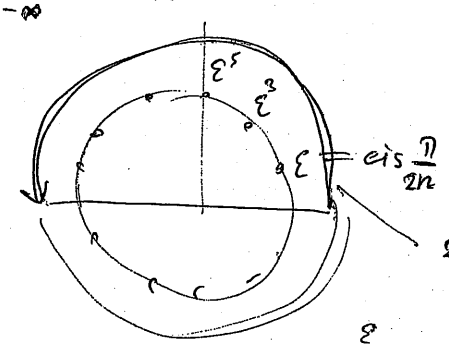
$\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$, $z \to \infty$

$\frac{P(z)}{Q(z)} \cdot z$

$(z-2i)$: $\frac{1}{1!}\left[\frac{z^2}{(z^2+9)(z+2i)^2}\right]' =$

$$= \frac{z^2}{(z^2+9)(z-2i)^2}\left[\frac{2}{z} - \frac{2z}{z^2+9} - \frac{2}{(z+2i)}\right]$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^p}{1+x^{2n}}\,dx$ $\quad \frac{z^p}{1+z^{2n}}$ $\quad 0 \le p \le 2n-2$



ε – решење $\quad z^{2n} = -1$

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, \varepsilon^{2k-1})$$

$Q(a) = 0 \quad (x-\varepsilon)(x-\varepsilon^3)\cdots(x-\varepsilon^{2n-1})\, c^{1+2n}$

f a – пол реда I

g анал. у a

$f(z)g(z) \to b \cdot g(a)$

MATH 19.4.2017

* $R(\sin t, \cos t)$ $z = e^{it}$

$\cos t = \frac{z+\bar{z}}{2}$ $= \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$

$dz = ie^{it}dt$ $dt = \frac{dz}{iz}$

$\cos mt = Re\ e^{imt}$

$\frac{z^m + \frac{1}{z^m}}{2}$

Př1 $\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos t + 1}\,dt$

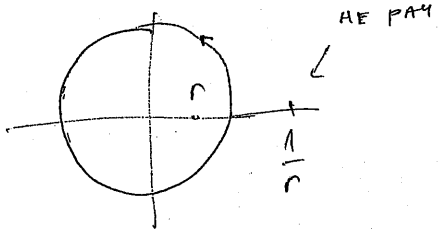
Př2 $\int_0^{2\pi} \frac{\cos mt}{5+3\cos t}\,dt = \frac{(-1)^n \pi}{2\cdot 3^m}$ pujčené

$\int_0^{2\pi} \frac{z^m + \frac{1}{z^m}}{10 + 6\left(z+\frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz}$ $r<1$

$r \to 0 \to \int = 2\pi$

$\int_{\partial U} \frac{1-r^2}{r^2 - 2r\frac{z+\frac{1}{z}}{2} + 1} \cdot \frac{dz}{iz} \overset{r\neq 0}{=} -\frac{1-r^2}{ir}\int_{\partial U} \frac{dz}{z^2 - \frac{r^2+1}{r}z + 1} =$

$= -\frac{1-r^2}{ir}\int_{\partial U} \frac{dz}{(z-r)(z-\frac{1}{r})}$



$= -\frac{1-r^2}{ir} 2\pi i\, Res(f, r)$

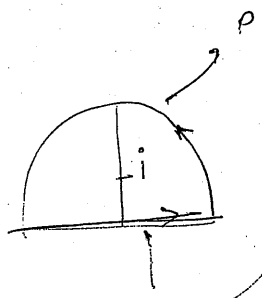
$= -\frac{1-r^2}{ir} 2\pi i \frac{1}{r-\frac{1}{r}} = 2\pi$

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2e}$$

III жорданова мера

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{e^{i\cdot 1\cdot \overset{\alpha}{t}}}{1+z^2}$$



$$= \frac{e^{i1z}}{(z-i)(z+i)}$$

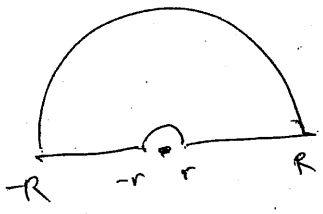
$2\pi i \operatorname{Res}(\ ,\ i)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx = 0 = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$$

ИМЕЕ ИНТЕГРАБИЛЕ, ЗА А1 ЗБГ.

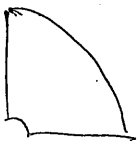
$$\frac{e^{iz}}{z}$$



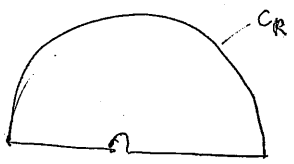
МАТ4

24. 4. 2017

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\cdot dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \;;\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x}\,dx \;\nexists$$



$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0^+\\ R\to\infty}} \left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos x}{x}\,dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\cos x}{x}\,dx \right]$$



$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0^+}} \int_{-R}^{-r} + \int_{r}^{R}$$

$$\boxed{\frac{e^{iz}}{z}} \qquad 0 = 2\pi i\cdot 0 \qquad \text{V.P.} \int$$

$$\int_{-R}^{-r} + \int_{r}^{R} + \int_{-C_r} \Rightarrow 0 = 2iI - i\pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$$

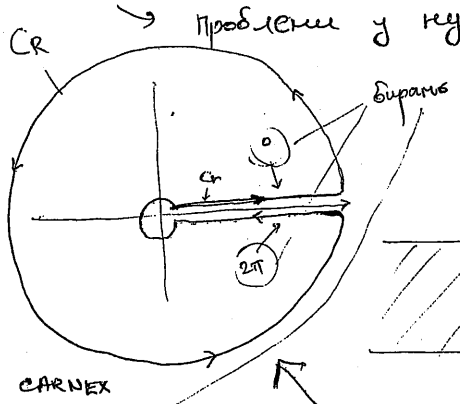
$z = 0$ пол I реда

$\int_{-R}^{-r} + \int_{r}^{R} \to i\cdot 2I$

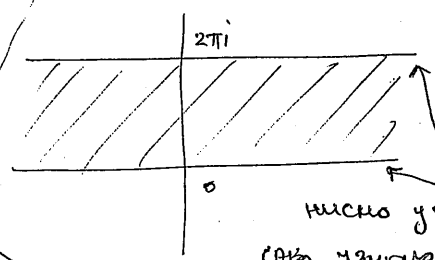
$\int_{-C_r} \xrightarrow{r\to 0^+ \text{ (II лема)}} -i\pi\cdot 1$

$R(x)$ – рационална ф-ја $\quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ st P > st Q + 1

→ проблеми у нулама именоца



$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$ "НА" ЈЕ НА $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

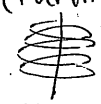


$e^z \to \mathbb{C}\setminus R_0^+$

нисмо узели праве

(ако узмемо, можемо само једну и тада $\mathbb{C}\setminus\{0\}$)

(РИМАНОВА ПОВРШ)



$$\log z = \ln|z| + i\cdot\varphi \qquad 0 < \varphi < 2\pi$$

$\varphi = \arg z$

$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z$ – КАД НЕ ПРЕЦИЗИРАМО КОЈИ ПОЈАС ГЛЕДАМО (границе на y-оси)

$$\int_{\mathbb{C}} R(z)\cdot \underbrace{\log z}_{\text{грана лог.}}\,dz = \quad \text{(ИЗДВАЈАЊЕ ГРАНЕ ЛОГАРИТМА)}$$

$$= 2\pi i\cdot\sum \operatorname{Res}$$

$$|\log z| = \sqrt{(\ln|z|)^2 + 4\pi^2} \;;\; |R(z)\cdot\log z| \le \frac{\ln|z|}{|z|}$$

$|R(z)| \le \frac{1}{|z|^2}$, $\ln|z| \cdot |z|$

$$\int_{\Theta} = \cancel{\int_{C_R}}^{\,0} + \cancel{\int_{C_r} |R(z)\log z|}^{\,0} + \int_r^R R(x)\cdot \cancel{\log x} - \int_r^R R(x)\,(\cancel{\log x} + 2\pi i)\,dx$$

$$\sim \overset{R(0)}{C}\cdot \ln|z| \cdot |z| \to 0$$

(IV нор1) (II нор1)

$$\int_{\Theta} = -2\pi i \int_r^R R(x)\,dx$$

ШТА АКО $\int_0^\infty R(x)\cdot \ln^{\boxed{k}} z \cdot dz$?

$$\left(\sqrt{\ln^2|z| + 4\pi^2}\right)^k \sim \ln^k|z|$$

$$\int_{\Theta} = \cancel{\int_{C_r}}^{\,0} + \cancel{\int_{C_r}}^{\,0} + \int_r^R R(x)\left[\cancel{\log^k x} - \left(\cancel{\log^k x} + \binom{k}{1}\log^{k-1} x\cdot(2\pi i) + \binom{k}{2}\log^{k-2} x\,(2\pi i)^2 + \dots\right)\right]dx$$

$$\int R(x)\ln^{k-1} x\,dx = f\left(\int R(x)\cdot \ln^j x\right) \qquad j \le k-2$$

стартујемо од $\int R(x)\cdot \ln^{\boxed{k+1}} x \cdot dx$

$$\boxed{\begin{gathered} 0 < \alpha < 1 \\ \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\cdot x^\alpha} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \end{gathered}}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz \quad ; \quad f = (z-a)^k\cdot g(z)$$

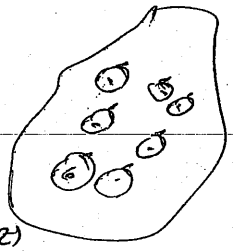
$$f' = k(z-a)^{k-1} g(z) + (z-a)^k g'(z)$$

$$\frac{f'}{f} = \frac{k}{z-a} + \frac{g'}{g}$$

; b – пол m-тог реда

$$(z-b)^m\cdot f(z) = g(z)$$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-b)^m} = (z-b)^{-m}\cdot g(z)$$



$$\frac{f'}{f} = \frac{-m}{z-b} + \frac{g'}{g}$$

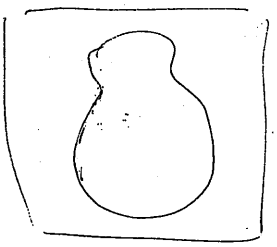
$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \underset{\text{бр. нула ф-је}}{N_f} - \underset{\text{полови}}{P_f}$$

ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

МАТ 4 24.4.2017

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{z_k} g(z_k)\,\mathrm{Ind}(z_k,\gamma) - \sum_{p_k} g(p_k)\,\mathrm{Ind}(p_k,\gamma)$$

f анал. сем у коначно много полова.



z_k – нуле
p_k – пол

f има пол I реда у "a" $\mathrm{Res}\, f = -a-1$

g – анал.

ОПШТИ ПРИНЦИП АРГУМЕНТА

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}dz = N_f - P_f$$

– рачунајући вишеструкост

– мери однос нула и полова (геометрију од f)

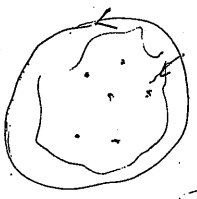
---

f, g анал. на $D \supset \gamma$; допуштамо коначно много полова

$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \ \forall z \in \gamma$ (РУШЕ – ова теорема) слабија варијанта

$\Downarrow$

$N_f - P_f = N_g - P_g$



$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \forall z \in \gamma$

$g(z) = z^n$

$f(z) = z^n + a_{n-1}\cdot z^{n-1} + \dots + a_0$

$$\underline{|a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0|} \le |z|^n$$

$\le \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k$ $\le$ ← за довољно велико z ова ради

$\Rightarrow \exists R, \ |z| = R$

Треба док. да f и g имају исти бр. нула.

$|f(z)+g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \quad \forall z \in \gamma$

$\leq$ — знамо из нej. Δ

ово каже да никад није $=$

Ако је $f(z) = 0$ некад $\Rightarrow |g(z)| < |g(z)|$ ↯

$\Rightarrow$ ~~нам~~ f, g немају нула на γ.

f и g нису истосмерни вектори

$\Rightarrow \dfrac{f(z)}{g(z)}$ — добро деф. на γ и $\dfrac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$

$\Rightarrow$ коректно деф. логаритам.

$\displaystyle\int_\gamma \ln \frac{f(z)}{g(z)} = 0$ ← аналитичка.

$\Rightarrow \left(\ln \dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'}{f} - \dfrac{g'}{g}$

МАТ 4

26.4.2017

$f: D \to \mathbb{C}$ аналитичка (D - отворен)

$\{z \mid |z| < 1\}$

$f(0) = 0 \quad |f(z)| \le 1$ → једнакост се овде јавља за $f(z) = c \cdot z$, $|c| = 1$

$|f'(0)| \le 1, \quad |f(z)| \le |z|$

$g(z) = \frac{f(z)}{z}, \quad z \in D \setminus \{0\}$

$g(0) = f'(0)$

$|z| = 1 \quad |g(z)| \le 1$

$z \in D$

$|z| = r < 1$

$|g(z)| = \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \frac{1}{r} \Rightarrow |g(z)| \le 1 \quad \forall z$

$|z| \le r \qquad r \to 1^- \quad \forall r \in [0,1]$

$f: D \to \mathbb{C}$

$|f(z)| \le 1 \qquad a, b \in D$

$f(a) = b$

$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a} z} \qquad a \in D$

$|z| = 1 \quad |e^{i\varphi}| = 1$, $e^{i\varphi} = z$

$$\left|\frac{e^{i\varphi} - a}{1 - \bar{a} e^{i\varphi}}\right| = \left|\frac{e^{i\varphi} - a}{e^{i\varphi}(e^{-i\varphi} - \bar{a})}\right| = \left|\frac{e^{i\varphi} - a}{e^{i\varphi}(\overline{e^{i\varphi} - a})}\right| = \frac{|\cancel{e^{i\varphi} - a}|}{|e^{i\varphi}|\,|\cancel{\overline{e^{i\varphi} - a}}|} = 1$$

$z \ne \infty, \frac{1}{\bar{a}}, \quad \left|\frac{z - a}{1 - \bar{a} z}\right| < 1 \qquad |w|^2 = w\bar{w}$

$\Leftrightarrow |z - a| < |1 - \bar{a} z|$

$|z - a|^2 < |1 - \bar{a} z|^2$

чине подгрупу билинеарних преслик.

$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) < (1 - \bar{a} z)(1 - a \bar{z})$

$|z|^2 - \cancel{a\bar{z}} - \cancel{\bar{a} z} + |a|^2 < 1 - \cancel{\bar{a} z} - \cancel{a \bar{z}} + |a|^2 |z|^2$

$0 < (|a|^2 - 1)(|z|^2 - 1)$

$0 < (1 - |a|^2)(1 - |z|^2)$

унутрашњост се слика у унутрашњост

$|z| < 1$

$$\varphi_{-a}(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z} \qquad \varphi_{-a}(0) = a$$

$\to$ диск. у диск, руб у руб

$$\varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a}(0) = \varphi_b \circ f(a) = \varphi_b(b) = 0$$

треба нам $\varphi_a'(0)$ и $\varphi_a'(a)$

изв.:

$$\varphi_a'(z) = \frac{1-\cancel{\bar{a}z} + (\cancel{z}-a)\bar{a}}{(1-\bar{a}z)^2} = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$$

$$\varphi_a'(0) = 1-|a|^2 < 1 \qquad \varphi_{-a}'(0) = 1-|a|^2$$

$$\varphi_a'(a) = \frac{1}{1-|a|^2} < 1$$

$$(\varphi_b \circ f \circ \varphi_{-a})'(0) \le 1$$

$$|\varphi_b'(\underset{\substack{\shortparallel \\ f(a)}}{b})|\,|f'(\underset{\substack{\shortparallel \\ \varphi_{-a}(0)}}{a})|\,|\varphi_{-a}'(0)| \le 1$$

$$\frac{1}{1-|b|^2}\,|f'(a)|\,(1-|a|^2) \le 1 \quad ; \qquad g(z) = \frac{f(z)}{z} \equiv C, \quad z \in D\setminus\{0\}$$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \underbrace{x^{\alpha-1} e^{-x}}_{\sim\, x^{\alpha-1}} dx \quad , \quad \text{ради за } \alpha > 0$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} \cdot (1-x)^\beta \, dx$$

коректно дефа за $\alpha,\beta > 0$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]\Big|_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^\infty x^\alpha \underbrace{e^{-x} dx}_{d(-e^{-x})} = \left[-x^\alpha e^{-x}\right]\Big|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \alpha > 0$$

$n \in \mathbb{N}$

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = \dots = n!$$

МАТ3

20.4.2012

$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$, $\alpha \in (0,1)$

$B(\beta,\alpha) = \int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx = \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} t^{\alpha-1}\,dt = B(\alpha,\beta)$ симетрична!

$B(\alpha+1,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha}\underbrace{(1-x)^{\beta-1}\,dx}_{=d\left(-\frac{(1-x)^\beta}{\beta}\right)} = \left[x^{\alpha}\left(-\frac{(1-x)^{\beta}}{\beta}\right)\right]_0^1 + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta}\,dx =$

$= \frac{\alpha}{\beta}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}(1-x)\,dx = \frac{\alpha}{\beta}\left[B(\alpha,\beta) - B(\alpha+1,\beta)\right]$

$\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right) B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\beta} B(\alpha,\beta)$

$$\boxed{B(\alpha+1,\beta) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} B(\alpha,\beta)}$$

нешто дваже елегантно само за $\alpha,\beta \in (0,1)$

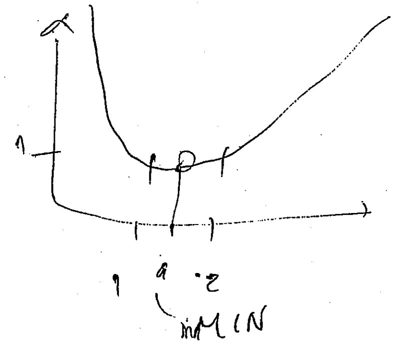
Ако бисмо смели да диф. под знаком интеграла:

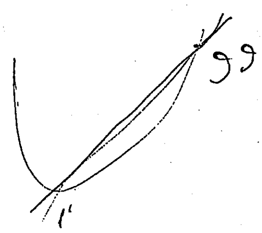
$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^\infty (\ln x)^k x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx$ ВАЈЕРШТРАС

$\alpha >, \alpha_0 > 0$

$[\alpha_0, \infty)$

$K=2$ $\Gamma'' > 0$





$\lim_{\alpha\to\infty} \Gamma(\alpha) = +\infty$

$\lim_{\alpha\to 0^+} \Gamma(\alpha) = +\infty$ врло брзо

$x = \frac{t}{1+t}$ [illegible] која развлачи $(0,1)$ на $(0,+\infty)$

$x = 1 - \frac{1}{1+t}$

(2)

$$\cancel{1-x = 1-\frac{t}{t-1} = \frac{1}{t-1}}$$

$$x = \frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1} \qquad \begin{matrix} t\to\infty & x\to 1 \\ t\to 0 & x\to 0 \end{matrix}$$

$$x'_t = -+\frac{1}{(t+1)^2}$$

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{(1+t)^{\beta-1}} \frac{1}{(t+1)^2}\, dt = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}}\, dt$$

цио је да покажемо да се $B(\alpha,\beta)$ може приказати преко Γ.

МАТ4 3.5.2017

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \quad B(\alpha,\beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

$$\frac{\alpha-1}{\alpha-1+\beta} B(\alpha-1,\beta)$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha) \qquad B(\alpha,\beta) = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(1+t)^{\alpha+\beta}} dt \qquad B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$x = ut$?

$$\Gamma(\alpha) = u^{\alpha} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-ut} dt$$

$$B(\alpha,\beta) \cdot \Gamma(\alpha+\beta) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{v^{\alpha-1}}{(1+v)^{\alpha+\beta}} (v+1)^{\alpha+\beta} t^{\alpha+\beta-1} e^{-(v+1)t} dv\, dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{\alpha+\beta-1} \cdot \frac{e^{-t}}{t^{\alpha}} t^{\alpha} \int_0^\infty v^{\alpha-1} e^{-vt} dv\, dt =$$

$$= \Gamma(\alpha) \cdot \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t} dt = \Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)$$

$\Gamma \to$ пермутације без понављања

$B \to$ избор k од n честица (бирање

$$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \qquad \alpha \in (0,1)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad \Gamma^2\left(\tfrac{1}{2}\right) = \pi \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad ; \quad \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-x} dx$$

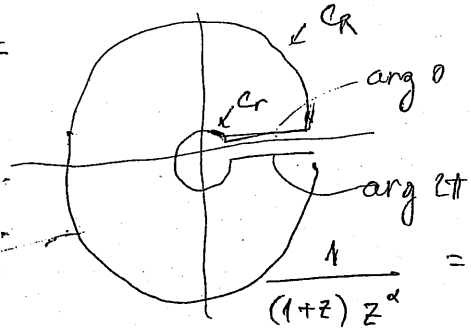
$$B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(\cancel{\alpha}+1-\cancel{\alpha})} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} \quad \Gamma(1) = 1$$

$$B(\alpha, 1-\alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \boxed{\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)t^{\alpha}}}$$

$+2k\pi i$?

$$t^{\alpha} = e^{\alpha \ln t}$$

$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$



α није цео

$|z^\alpha| = e^{\alpha(\ln|z| + (?))}$ ограничено

$\Rightarrow |z^\alpha| \sim |z|^\alpha$

$\to e^{\alpha \ln|z|}$ и за $z \to +\infty$, $z \to -\infty$

из IV интегралне леме $|f(z)\cdot z| \underset{z\to\infty}{\to} 0$

$\frac{1}{(1+z)z^\alpha} \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{|z||z|^\alpha}$

$\frac{1}{(1+z)z^\alpha} \underset{z\to 0}{\sim} \frac{1}{|z|^\alpha}$

$|z f(z)| \underset{z\to 0}{\sim} |z|\cdot\frac{1}{|z|^\alpha} = |z|^{1-\alpha} \underset{|z|\to 0}{\to} 0$

добили смо по интегралној леми $\int_{C_R} \to 0$ и $\int_{C_r} \to 0$

$$\int_{\mathcal{G}} = \int_{C_R} + \int_{C_r} + \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^\alpha} - e^{-2\pi\alpha i}\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^\alpha} = (1-e^{-2\pi\alpha i})\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^\alpha} =$$

пробијем у тачки $x=-1$

$\frac{1}{(1+z)z^\alpha}$ → аналитичко у -1

$\Rightarrow z=-1$ пол I реда.

$= 2\pi i \operatorname{Res}(f,-1) = 2\pi i e^{-\alpha\pi i}$

$\operatorname{Res}(f,-1) = e^{(-1)^{-\alpha}}$

MAT4 3.5.2017.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)x^\alpha} = \frac{2\pi i\, e^{-\alpha\pi i}}{1-e^{-2\pi i\alpha}} = \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha} \quad \blacksquare$$

$$\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}\,\Gamma\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2n-3}{2}\,\Gamma\left(\frac{2n-3}{2}\right) =$$

$$= \dots = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\,\Gamma(1) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!}\sqrt{\pi}$$

$\alpha,\beta \geq 0$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t\cdot\cos^\beta t\cdot dt = \left\{\begin{array}{l} u=\sin t \\ du=\cos t\,dt \end{array}\right. = \int_0^1 u^\alpha (1-u^2)^{\frac{\beta-1}{2}}\cdot du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{\alpha-1}{2}}(1-x)^{\frac{\beta-1}{2}}dx = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}\right)$$

$\Gamma = \int_0^1 + \int_1^\infty$ ✓ ;

$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\cdot\Gamma(\alpha)$

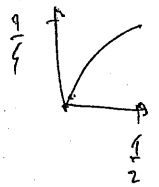
$\alpha \in \mathbb{C}$

$\alpha = 0 \quad \Gamma(1) = 0\cdot\Gamma(0)$

нема шансе да дефинишемо Γ у 0, тј. у $\mathbb{C}$, већ у $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\dots\}$

(*) $$\Gamma(2\alpha) = \frac{2^{2\alpha-1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\tfrac{1}{2})$$

ИДЕЯ: $$B(\alpha,\alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\alpha-1}\,dx = \int_0^{1/2} \underbrace{(x-x^2)}_{=\frac{1-u}{4}}{}^{\alpha-1}\,dx =$$



$$x-x^2 = \frac{1-u}{4} \to u = (2x-1)^2$$

$$x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{u})$$

$$= \frac{2}{4^\alpha}\int_0^1 (1-u)^{\alpha-1}\,u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{2}{4^\alpha}\,B(\alpha,\tfrac{1}{2})$$

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} = \frac{1}{2^{2\alpha-1}}\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}.$$

$$\Gamma(2) = \frac{2^{2\alpha-1}}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\alpha+\tfrac{1}{2})$$

(*) $n \in \mathbb{N}$ $$\Gamma(\tfrac{1}{n})\,\Gamma(\tfrac{2}{n})\cdots\Gamma(\tfrac{n-1}{n}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$$

MAT 4.

8.5.2017

$n \in \mathbb{N}$ $\quad \underbrace{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}_{L} = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}$

$\alpha \in (0,1)$

$\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$

$$L^2 = \frac{\pi^{n-1}}{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$$

$$\frac{z^n-1}{z-1} = (z-\omega_1)\cdots(z-\omega_{n-1})$$

$\omega_1 = \operatorname{cis}\frac{2\pi}{n}$

$\omega_2 = \operatorname{cis}\frac{4\pi}{n}$

$\vdots$

$\omega_{n-1} = \operatorname{cis}\frac{(n-1)2\pi}{n}$

$$|1-\omega_k| = 2\sin\frac{k}{n}\pi$$

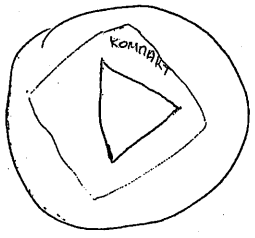
$$|1-\omega_k|^2 = \left|1-\cos\tfrac{2k\pi}{n} - i\sin\tfrac{2k\pi}{n}\right|^2 =$$

$$= \left(1-\cos\tfrac{2k\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\tfrac{2k\pi}{n} =$$

$$= 2-2\cos\tfrac{2k\pi}{n}$$

$$= 4\sin^2\tfrac{k\pi}{n}$$

$$\Rightarrow n = 2^{n-1}\sin\tfrac{\pi}{n}\cdots\sin\tfrac{(n-1)\pi}{n}$$



НИЈЕ КОМПАКТ, АЛИ МОЖЕ ДА СЕ ИСЦРПИ КОМПАКТИМА (ЛОКАЛНОСТ?)

$D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ $\quad f_n$-аналитичке

$\forall K_i \quad f_n \rightrightarrows f$ на K_i

$\Rightarrow f$ аналитичка

МЕРОМОРФНА = АНАЛИТИЧКА КОЈА У СВАКОМ КОМПАКТУ ИМА КОНАЧНО МНОГО ПОЛОВА.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{z-1}e^{-x}\,dx = \int_1^\infty x^{z-1}\cdot e^{-x}\,dx + \int_0^1 x^{z-1}\underbrace{e^{-x}}_{\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n!}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \sum \frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^{n+z-1}\,dx + \int_1^\infty = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$$

РАДИ ЗА $\forall z$ КАДА ЈЕ n ДОВОЉНО ВЕЛИКО ДА n ПРЕБАЦИ z.

АНАЛИТИЧКА

$$\Gamma(\alpha) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} x^{z-1} e^{-x} \cdot dx}$$

избили смо сингуларитет у нули

има смисла за $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$

проблематичан у негативним целим.

$\frac{(-1)^{10}}{10!} \cdot \frac{1}{z-10}$; пол. I РЕДА $-n$, $n \in \mathbb{N}_0$

$$\operatorname{Res}(\ , -n) = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \ ; \ (z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\})?$$

ЛАПЛАСОВ ТРАНСФОРМ

$f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R} \ (\mathbb{C})$ ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ да не мислимо о случајевима транслације)

$$F(f) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t)\, dt \qquad |f(t)| \le M \cdot e^{\omega t}$$

$F(f)$ — слика, $f(t)$ — оригинал

$\mathcal{L}(f)(p)$ — лапласов трансформ → контрола д.ј. одређеног облика (ј-НЕ „без прошлости")

(1) $f \equiv 1$ локално инт. експоненцијално ограничена за $M = 1$ и $\omega = 0$ $(p > 0)$

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right] \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

$n=0$

(2) $\mathcal{L}(e^{\alpha t})$ $\quad \int_0^{\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = \frac{1}{p-\alpha}$

$\operatorname{Re} p > \alpha$

$n \in \mathbb{N}$

(3) $$\mathcal{L}(t^n) = \int_0^{\infty} t^n \cdot e^{-pt} \cdot dt = \left\{ t = \frac{x}{p} \right\} = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}} e^{-x} \cdot dx = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

за лин. комб, ~~одно~~ $|\underset{\omega_1}{\alpha f} + \underset{\omega_2}{\beta g}| \le |\alpha| \cdot M_1 e^{\omega_1 t} + |\beta| M_2 e^{\omega_2} t$

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$$

⇒ ради и за полиноме.

МАТ4 (3) 8. 5. 2017.

$\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\operatorname{ch} \alpha t) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\alpha} + \frac{1}{p+\alpha}\right] = \frac{p}{p^2-\alpha^2}$$

$$\mathcal{L}(\operatorname{sh} \alpha t) = \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$$

$$\mathcal{L}(\cos \alpha t) = \frac{p}{p^2+\alpha^2} \quad \text{ЗАВЪА СЕ } i\alpha$$

$$\mathcal{L}(\sin \alpha t) = \frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$$

МАТ4 10. 5. 2017

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt$$

$\mathcal{L}(f) = F$

f – локално интеграбилна, експоненцијално огр.

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t)) = \mathcal{L}(f(t)) \cdot (p-\alpha)$$

$|f(t)| \le M e^{\omega t}$; $|e^{\alpha t} f(t)| \le M e^{(\omega+\alpha)t}$

$\mathcal{L}$ дефинисан за $p > \omega + \alpha$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t)) = \int_0^\infty e^{\alpha t} f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \frac{1}{p-\alpha}$$

$$\mathcal{L}(e^{\alpha t} \cdot \cos \beta t) = \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$$

последица Лагранжове (1)

$\mathcal{L}(f'(t)) \to$ очекујемо да f' буде лок. инт, експ. огр
тражимо исто и за f. (али следиће то из 1)

$$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-pt}\, dt = \left[e^{-pt} \cdot f(t)\right]\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = p \cdot \mathcal{L}(f(t)) - f(0)$$

– постоји због експ. огр.

лаплас трансформише извод у множење параметром

$f^{(n)}$, екст. огр., лок. инт.

$$\mathcal{L}(f'(t)) = p\cdot\mathcal{L}(f') - f'(0) = p(p\mathcal{L}(f) - f(0)) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}(f'') = p^2\mathcal{L}(f) - p^1 f(0) - p^0 f'(0)$$

$$\mathcal{L}(f^n) = p^n\mathcal{L}(f) - p^{n-1}\cdot f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - p^0\cdot f^{(n-1)}(0)$$

$a_n f^{(n)} + \dots + a_0 f = g$ хочем да приложим $\mathcal{L}(\,)$

$F = \mathcal{L}(f)$

$$\mathcal{L}(a_n f^{(n)} + \dots + a_0 f) = \mathcal{L}(f)\underbrace{[a_n p^n + \dots + a_0]}_{\text{КАРАКТЕРИСТИЧЕН ПОЛИНОМ}} = \mathcal{L}(g) + \text{пол.}(p)$$

НЕКА Ф-ЦИЯ ОТ p

$\mathcal{L}(e^{\alpha t}) = \frac{1}{(p-\alpha)^n}$ / $\frac{C}{p-\alpha}$; $C\cdot e^{\alpha t}$

$\mathcal{L}(C\cdot e^{\alpha t}) = \frac{C}{p-\alpha}$?

---

f – лок. инт. екст. огр.

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

интегриране

$$\mathcal{L}(g) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)$$

$$f * g(x) = \int_0^x f(t)\,g(x-t)\,dt \quad \text{конволюция}$$

$|f(t)| \le M e^{\omega_1 t}$; $|g(x-t)| \le N e^{\omega_2 (x-t)}$

$\Rightarrow |f(t)\cdot g(x-t)| \le C\cdot e^{\omega t}$ $\operatorname{Re} p > \max\{\omega_1, \omega_2\}$

МАТ 4

10.5.2017.

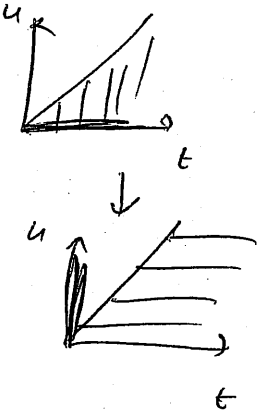
$f * g = g * f$ комутативно

$(\alpha f_1 + \beta f_2) * g = \alpha f_1 * g + \beta f_2 * g$ линеарност (из ком. лин и по другом)

$f * (g * h) = (f * g) * h$ асоцијативност

$f * g = 0 \Rightarrow f \equiv 0 \vee g \equiv 0$ (нема делилаца нуле)

$$\mathcal{L}(f * g) = \int_0^\infty e^{-pt} \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du\, dt =$$



$$= \int_0^\infty f(u)\, e^{-pu} \int_u^\infty g(t-u)\, e^{-p(t-u)}\, dt\, du$$

$$= \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g)$$

$F = \mathcal{L}(f)$, $a > 0$, $k > 0$

1° $\mathcal{L}(f(kx)) = \frac{1}{k} F\left(\frac{p}{k}\right)$

2° $\mathcal{L}(f(x-a)) = e^{-ap} F(p)$

2'$\mathcal{L}(f(x+a)) = e^{ap}\left(F(p) - \int_0^a f(x)\, e^{-px}\, dx\right)$

$\mathcal{L}(x^n \cdot f(x)) = (-1)^n F^{(n)}(p)$

$\frac{f(x)}{x}$ оригинал $\Rightarrow$ f оригинал $+ \mathcal{L}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \int_p^\infty F(u)\, du$

1° $\frac{1}{k} \int_0^\infty f(kx) \cdot e^{-p \cdot \frac{k \cdot x}{k}}\, d(kx)$

2° $\int_0^\infty f(x-a)\, e^{-px}\, dx = e^{-pa} \int_{-a}^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$

2'$\int_0^\infty f(x+a)\, e^{-px}\, dx = e^{pa} \int_a^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = e^{pa} \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt - e^{pa} \int_0^a f(t)\, e^{-pt}\, dt$

(2)

3° . . .

№ 1 : $y'' - 2y' - 3y = 3x + e^{2x}$

$y(0) = -1 \quad y'(0) = 1$

$Y = \mathcal{L}(y)$

$\mathcal{L}(y') = p \cdot Y + 1$

$\mathcal{L}(y) = p^2 \cdot Y + p - 1$

$Y(p^2 - 2p - 3) - 2 + p - 1 = \frac{3}{p^2} + \frac{1}{p-3}$

$x' - 2x - 4y = \cos t$

$y' + x + 2y = \sin t$

$x(0) = -1$

МАТ 4

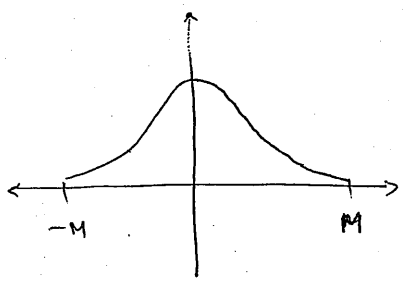
15. 5. 2017

$\int_{\mathbb{R}} |f|\,dx < \infty$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\|f\|_1$ – норма

↓

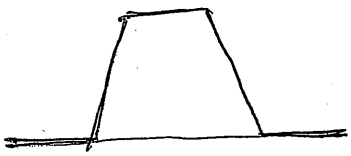
апсолутно интеграбилне ф-је ($f \in L^1_{\mathbb{C}}$)



$g \in C_c \quad \{x \mid f(x) \neq 0\}$

$\int |f-g|\,dx < \varepsilon$

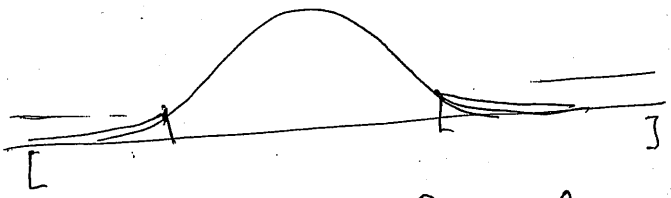
$\left(\int |f-g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \quad p \in \mathbb{N}$



$\sum c_k \cdot \chi_{E_k}$

$\frac{\varepsilon}{|c_k| \cdot n}$

$C_c, \|\cdot\|_\infty$



$f_n \in C_c$, $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{} f$

$f_n(x) \longrightarrow g(x)$ скоро свуда ($\{x \mid$ за које не важи$\}$ мере нула)

$\exists F, \ |f_n| \leq M + F \in L^1$ тј. $\int F\,dx < \infty$ (ТЕОРЕМА О ДОМИНАНТНОЈ КОНВЕРГЕНЦИЈИ)

$\alpha, \lambda \in \mathbb{R}^+$, $f \in L^1$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{\mathbb{R}}\right)$

$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-ixt} \cdot dx$ $\qquad dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$

$\mathbb{R}$

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixt}\, dm(x)$$

$|e^{i\varphi}| = 1 \qquad \varphi \in \mathbb{R}$ (since $\varphi \in \mathbb{R}$)

$\alpha \in \mathbb{R}$

$|f(x) \cdot e^{-ixt}| = |f(x)|$

(1) $g(x) = f(x) \cdot e^{i\alpha x}$

$\Downarrow$

$\hat{g}(t) = \hat{f}(t-\alpha)$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \underbrace{e^{i\alpha x} e^{-itx}}_{e^{-ix(t-\alpha)}} \, dm(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix(t-\alpha)} \, dm(x)$$

(2) $g(x) = f(x-\alpha) \Rightarrow \hat{g}(t) = \hat{f} e^{-i\alpha t}$

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x-\alpha)}_{u} e^{-ixt} \, dm(x) = \int_{\mathbb{R}} f(u) \cdot e^{-i(u+\alpha)t} \, dm(u) = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-iut} e^{-i\alpha t} \, dm(u)$$

(3) $f, g \in L^1$, $h = f * g$, $\hat{h}(t) = \hat{f}(t) \cdot \hat{g}(t)$

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, dm(y)$$

$$\hat{h}(t) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x-y) g(y) \, dm(y)}_{h(x)} \cdot e^{-ixt} \, dm(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(y) \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y) e^{-ixt} \, dm(x) \right]}_{\hat{f}(t) \, e^{-yt}} dm(y)$$

(4) $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \hat{g}(t) = \overline{\hat{f}(t)}$

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{\underbrace{f(-x)}_{u}} \, e^{-ixt} \, dm(x)$$

$$\overline{e^{-iut}}$$

(5) $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \hat{g}(t) = \lambda \hat{f}(\lambda t)$

$$\int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) e^{-ixt} \underbrace{d\mu(x)}_{\lambda\, d\mu(\lambda u)} \qquad dx = \lambda\, du$$

u u $e^{-i(\lambda u)t}$

---

(6) $g(x) = \dfrac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} \overset{(2)}{\Rightarrow} \hat{f}(t)$

$$\hat{g}(t) = \hat{f}(t) \cdot \frac{e^{i\alpha t} - 1}{\alpha} \xrightarrow[\alpha \to 0]{} it\hat{f}(t)$$

$f', f \in L^1 \longrightarrow \hat{f}'(t) = it \cdot \hat{f}(t)$

(7) $g(x) = -ix f(x)$ i $g \in L^1$

$\Rightarrow \hat{f}$ je glad. i $\left(\hat{f}(t)\right)'_t = \hat{g}(t)$

$$\frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(t)}{s-t} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \underbrace{\frac{e^{-ixs} - e^{-ixt}}{s-t}}_{\left|\frac{e-c}{s-t}\right| \le |x|} d\mu(x)$$

$s \to t$

$-ix \cdot e^{-ixt}$

$\hat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ixs}\, d\mu(x)$

---

(8) $f \ge 0$

$\hat{f}(0) = \int f(x)\, dx = \|f\|_1$

$e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx \qquad g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \cdot e^{inx}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_k c_k \cdot e^{ikx}\right)e^{-inx}\,dx$$

$e^{ikx}\cdot e^{-inx} = e^{-i(n-k)x}$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n-k)x}\,dx = \begin{cases} 0, & n\neq k \\ c_n, & n=k \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i(s-t)\cdot x}\,d\mu(x)$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, e^{ixt}\,d\mu(t)$$

ДА ЛИ ЈЕ ИНТ.

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixt}\,d\mu(x)$$

ЗА ШИВЕРЗ: РАДЊИТЕ ЗА $\hat{f}, f \in L^1$?

$f \in L^1$, $y \longrightarrow f(x-y)$

$\mathbb{R} \longrightarrow L^1$

ДА ЛИ ЈЕ ОВО НЕПР.?

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall y,z\ |y-z|<\delta \Rightarrow \int |f(x-y)-f(x-z)|\,dx$

$g \in C_c \quad \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)-g(x-z)|\,dx \quad |y-z|<\delta$

$< \varepsilon \cdot 2\cdot m(\operatorname{supp} g)$ ← мера носача од g

$$\|f_y - f_z\| = \|f_y - g_y + g_y - g_z + g_z - f_z\| \le$$

$$\le \|f_y - g_y\| + \|g_y - g_z\| + \|g_z - f_z\|$$

$\|f-g\| \le \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad$ $\frac{\varepsilon}{3}$ $\quad$ $\frac{\varepsilon}{3}$ $\quad$ $\frac{\varepsilon}{3}$

$\int_{\mathbb{R}} |f(x)-g(x)|\,dx$

// место до на смену

$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)-g(x-y)|\,dx$

МАЛО транслирање те бити продужено.

$H(t) = e^{-|t|}$ $\lambda > 0$

$$h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \cdot e^{-itx} \cdot dm(t)$$

СПРЕМАМО ЈЕЗГРО (АПРОКС. ЈЕД.)

(1) $h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}$

(2) $h_\lambda \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(x) \cdot dm(x) = 1$

Док: $\int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda}{\lambda^2+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} d\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \pi$

$0 \leq H(t) \leq 1$

$H(\lambda t) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 1$

$\frac{1}{\lambda} \cdot h_\lambda\left(\frac{x}{\lambda}\right) = h_\lambda(x)$

МАТ4 17.5.2017

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-itx} \, dm(x)$$

$$H(t) = e^{-|t|} \qquad \lambda > 0$$

h_λ и H међусобно инверзне

$$h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{itx} \, dm(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}$$

$$\int h_\lambda(x) \, dm(x) = 1$$

$$0 < H(t) \leq 1, \quad H(\lambda t) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 1$$

низ $H(\lambda_n t)$

$$h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{x^2+\lambda^2}$$

$$\left.\begin{aligned} h_\lambda(0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\lambda} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} \infty \\ h_\lambda(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{x^2+\lambda^2} \xrightarrow[\lambda \to 0]{} 0 \end{aligned}\right\} \text{иде ка Дираковој дист.}$$

$x \neq 0$

$$h_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \cdot e^{itx} \cdot dm(t) + \int_{-\infty}^0 e^{-xt} \cdot e^{itx} \, dm(t) = -\frac{e^{-t(\lambda - ix)}}{\lambda - ix} \Big|_0^\infty + \dots =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[\frac{1}{\lambda - ix} + \frac{1}{\lambda + ix} \right]$$

$$f_y(x) = f(x-y) \quad ; \quad y \longmapsto f_y$$
$$\mathbb{R} \to L^1$$

(T) $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C_0$

$$|\hat{f}(t) - \hat{f}(s)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \left[e^{-itx} - e^{-isx} \right] dm(x) \right| \leq$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot \underbrace{|e^{-itx} - e^{-isx}|}_{\leq 2} \cdot dm(s)$$

lim уђе под инт., из непр. e $\quad e^{-itx} \to e^{+isx} \quad (t \to s)$

ПР 01 ТЭУЕ

u – смена

$$\hat{f}(t) = -\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-itx} \cdot e^{i\pi} \, dm(x) = -\int_{\mathbb{R}} f(x) \, e^{-it(x - \frac{\pi}{t})} \, dm(x)$$

$$|2\hat{f}(t)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \left(f(x) - f(x + \tfrac{\pi}{t})\right) e^{-ixt} \, dm(x) \right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+\tfrac{\pi}{t})| \, dm(x) =$$

$$= \| f - f_{-\frac{\pi}{t}} \|_1$$

(T) $f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C_0$

(T) $f \in L^\infty$, f непр. у x, $\lim_{\lambda \to 0} f * h_\lambda(x) = f(x)$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \cdot h_\lambda(y) \, dm(y) - f(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} h_\lambda(y) \, dm(y)}_{=1} \right| =$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} [f(x-y) - f(x)] \, h_\lambda(y) \cdot dm(y) \right|$$

$$h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{x^2 + \lambda^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} = \frac{1}{\lambda} \cdot h_1\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} [f(x-y) - f(x)] \, \frac{1}{\lambda} \cdot h_1\left(\frac{y}{\lambda}\right) dm(y) \right| =$$

($\frac{y}{\lambda} = u$)

$$= \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x - u\lambda) - f(x)) \, h_1(u) \, dm(u) \right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x-u\lambda) - f(x)| \, h_1(u) \, dm(u)$$

($h_1(u) \geq 0$)

$$\le 2 \|f\|_\infty \cdot h_1$$

конст. — инт.

(7) $f \in L^1$, $f * h_\lambda(x) \xrightarrow[\lambda \to 0]{} f(x)$ у норми $\|\cdot\|_1$

$$|f * h_\lambda(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} [\underbrace{f(x-y)}_{f_y} - f(x)]\, h_\lambda(y)\, dm(y)$$

$$\|f * h_\lambda - f\|_1 \leq \| f_y(x) - f\|_1$$

$$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, h_\lambda(y)\, dm(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y) \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) e^{ity}\, dm(t)\, dm(y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t) \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, e^{ity}\, dm(y) \right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\, e^{itx} \left[\int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, e^{it(y-x)}\, dm(y) \right] dm(t)$$

$f \in L^1$, $$f * h_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} H(\lambda t)\, \hat{f}(t)\, e^{itx}\, dm(x)$$

инверзија $$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)\, e^{itx}\, dm(t)$$

Требају нам услови да lim уђе под интеграл

треба $\int |\hat{f}| < \infty$, $f, \hat{f} \in L^1$

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \cdot e^{itx} \cdot dm(t)$$

$(f \in L^1 \Rightarrow \hat{f} \in C_0)$ — непр. које $\xrightarrow[x \to \infty]{} 0$

$g = f$ скоро свуда $\Rightarrow f \in C_0 \cap L^1$

~~Ако~~ $f \in L^1$, $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$ скоро свуда

$f: [0,\infty] \longrightarrow \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}(f) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt = \int_0^\infty \underbrace{\left[f(t)\, e^{-at} \right]}_{g(t)} \cdot e^{-ibt}\, dt$$

$g(t) \neq 0 \quad t \geq 0$

$g(t) = 0 \quad t < 0$

$\hat{g}(b) = \mathcal{L}(f)$

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(b)\, e^{ibt}\, d\mu(b)$$

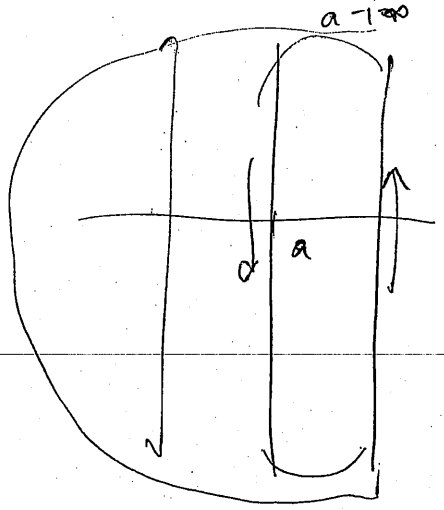
$$f(t)\, e^{-at} = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(f)\,(a+ib)\, e^{ibt}\, d\mu(b)$$

$$f(t)\, e^{-at} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(f)\,(a+ib)\, e^{ibt}\, db$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(f)\,(\underbrace{a+ib}_{p})\, e^{(a+ib)t}\, db$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(f)(p) \cdot e^{pt}\, (i\, db = dp)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}(f)(p)\, e^{pt}\, dp$$

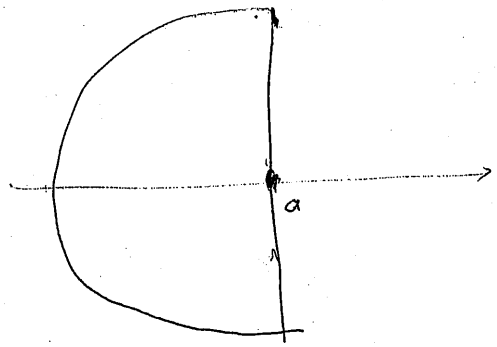


$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \mathcal{L}(f)(p)\, e^{pt}\, dp \quad = (*)$$

$\mathcal{L}(f)(p)$ – рац.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \mathcal{L}(f)(p)\, e^{at}\, e^{tRe^{it}}\, iRe^{it}\, dt$$



$a > \omega(f)$

$|f(t)| \le M e^{\omega t}$

$\mathcal{L}(f)$ – р. ац.

$p = a + Re^{it}$

$\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\, e^{i\alpha t} \quad (*) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} \mathcal{L}(f)(p)\, e^{pt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(m_k-1)!} \lim_{p\to p_k} \left[(p-p_k)^{m_k} \mathcal{L}(f)(p)\, e^{pt} \right]^{(m_k-1)}$$

$p_1, \dots, p_n$

$m_1, \dots, m_n$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \boxed{\frac{c_0}{p}} + \frac{c_1}{p^2} + \frac{c_2}{p^3} + \dots$$ ДА ЈЕ КОНАЧАН

$$f(t) = c_0 + c_1 \frac{t}{1!} + c_2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

Хилбертов простор

H, $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $H \times H \to \mathbb{C}$

$\langle x, y \rangle \ge 0$

СКАЛАРНИ ПРОИЗВОД:

1° $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in H$ } ЛИНЕАРНОСТ ПО I КООРДИНАТИ

2° $\langle \alpha \cdot x, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle \quad \forall x, z \in H \ \forall \alpha \in \mathbb{C}$ }

3° $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in H$

4° $\langle x, x \rangle \ge 0$ $\quad (\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0)$

ВАЖНО

$\cdot \longrightarrow \langle \cdot, z \rangle$ ЛИНЕАРНО И НЕПРЕКИДНО

ЗА ФИКСНО z

$$\langle z, \alpha x + \beta y \rangle = \overline{\langle \alpha x + \beta y, z \rangle} = \overline{\langle \alpha x, z \rangle} + \overline{\langle \beta y, z \rangle} =$$

$$= \overline{\alpha \langle x, z \rangle} + \overline{\beta \langle y, z \rangle} = \bar{\alpha} \langle z, x \rangle + \bar{\beta} \langle z, y \rangle$$

$\langle x, x \rangle \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x, x \rangle}$ добро дефинисано

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ покажимо да је ово норма

1° $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ✓ директ из 4°

2° $\|\alpha x\| = \sqrt{\langle \alpha x, \alpha x \rangle} = \sqrt{\alpha \bar{\alpha} \langle x, x \rangle} = |\alpha| \cdot \|x\|$

3° $\underset{L}{\|x + y\|} \leq \|x\| \underset{D}{+} \|y\| \quad / \wedge 2 \qquad \leq \qquad \overset{D^2}{\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|}$

$$L^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \underbrace{\langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle}_{= 2\,\mathrm{Re}(\langle x, y \rangle)}$$

Коши Шварц: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

$\exists \alpha \quad |\alpha| = 1$

т.д. $\alpha \cdot z = |z|$

$$0 \leq \langle x - \alpha r \cdot y, x - \alpha r y \rangle = \|x\|^2 - r \underbrace{\left[\alpha \langle y, x \rangle + \bar{\alpha} \overline{\langle y, x \rangle} \right]}_{2|\langle y, x \rangle|} + r^2 \|y\|^2$$

$y = 0: \quad |\langle x, 0 \rangle| \leq \|x\| \cdot 0$

$$4 |\langle y, x \rangle|^2 - 4 \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0$$

$x \to \langle x, y \rangle$

$x \to \langle y, x \rangle$

$x \to \|x\|$

$x_n \to x$

$\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$

$|\langle x_1, y \rangle - \langle x_2, y \rangle| = |\langle x_1 - x_2, y \rangle| \leq \|x_1 - x_2\| \cdot \|y\|$

$\mathbb{C}^n, \quad \langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$

МАТ4 22.5.2017.

идемо на ∞ низове

$x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, ℓ^2 – скуп низова где $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$

$x, y \in \ell_2$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} \right| \leq \left(\sum_{k}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{1/2}$$

$f : (a,b) \to \mathbb{C}$ $\quad \int_a^b |f|^2 dx < \infty \quad L^2(a,b)$

$\langle f, g \rangle = \int_a^b f \cdot \overline{g} \, dx \qquad \int |f|$

$x \to \langle x, y \rangle$ cos

симетричност битна

НОРМАЛНОСТ: $\langle x, y \rangle = 0 \quad x \perp y \iff y \perp x$

~~$\langle x+y \rangle = 1$~~

x и y су нормални

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \cancel{\langle x, y \rangle}^{0} + \cancel{\langle y, x \rangle}^{0}$$

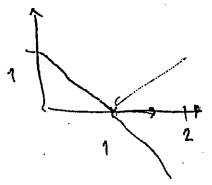
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ питагора

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 =$$

$$= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle =$$

$$= \boxed{2\|x\|^2 + 2\|y\|^2} + \cancel{\langle x, y \rangle} + \cancel{\langle y, x \rangle}$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \longrightarrow$$



Ако ово важи $\forall x, y \Rightarrow$ норма настала од скаларног производа

$$\frac{\|x+y\| + i\|x+iy\| + \|x-y\| - i\|x-iy\|}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \left[i^k \|x + i^k y\| \right]$$

МАТ 4 24.5.2017.

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{3} i^n \|x+i^n y\|^2 = \frac{\|x+y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x-y\|^2}{4}$$

$\forall\ u,v,w$.

$$\|u+v+w\|^2 + \|u+v-w\|^2 = 2\left(\|u+v\|^2 + \|w\|^2\right)$$

$$\|u-v+w\|^2 + \|u-v-w\|^2 = 2\left(\|u-v\|^2 + \|w\|^2\right)$$

$$\langle u+w,v\rangle + \langle u-w,v\rangle = 2\cdot\langle u,v\rangle \leftarrow \text{НЕ ЗАВИСИ ОД } w$$

i) АКО ЈЕ $y=0$: $\langle x,y\rangle = \langle x,0\rangle = 0$

ii) $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

iii) $\langle x,x\rangle \geq 0$ $\quad x=0 \iff \langle x,x\rangle = 0$

за $w=u$:

$$\underbrace{\langle u+w,v\rangle}_{x,\ z} + \underbrace{\langle u-w,v\rangle}_{y} = \langle 2u,v\rangle$$

$$\langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle = \langle x+y,z\rangle \quad \text{(АДИТИВНОСТ)}$$

$u+w=x \quad u-w=x$

$\Rightarrow \quad 2\langle x,z\rangle = \langle 2x,z\rangle$

$u+w=x \quad u-w=2x$

$\Rightarrow \quad 3\langle x,z\rangle = \langle 3x,z\rangle$

$\vdots$

$n\langle x,z\rangle = \langle nx,z\rangle$

ТРИВИЈАЛНО:

$$\langle \alpha x,\alpha y\rangle = |\alpha|^2\langle x,y\rangle$$

$p,q\in\mathbb{N}$

$$\left\langle \frac{p}{q}x,\frac{q}{q}y\right\rangle = p\left\langle \frac{1}{q}\cdot x,\frac{q}{q}y\right\rangle = \frac{p}{q^2}\langle x,q\cdot y\rangle =$$

$$= \frac{p}{q^2}\overline{\langle q\cdot y,x\rangle} = \frac{p}{q}\overline{\langle y,x\rangle} = \frac{p}{q}\langle x,y\rangle$$

ВАШИЛ ЗА СВЕ РАЦИОНАЛНЕ!

МАТ4 24.5.2017.

САМ ЗА РЕАЛНЕ:

$$\langle r\cdot x, y\rangle = \langle (r-q+q)\cdot x, y\rangle = q\langle x,y\rangle + \langle (r-q)x, y\rangle$$

$\langle x,y\rangle = 0$, $x \perp y$ РЕЛАЦИЈА НОРМАЛНОСТИ СИМЕТРИЧНА

КОМПЛЕТАН ПРОСТОР СА СКАЛАРНИМ ПРОИЗВОДОМ
||
ХИЛБЕРТОВ ПРОСТОР

$$M^{\perp} = \bigcap_{x\in M} x^{\perp} = \overline{\mathcal{L}(M)}^{\perp}$$

$M^{\perp}$ – УВЕК ПОТПРОСТОР

$x \in M^{\perp}$ $y \in M^{\perp}$ $\forall z \in M$ $\langle x,z\rangle = 0$, $\langle y,z\rangle = 0$

$$\Rightarrow (M^{\perp})^{\perp} = \mathcal{L}(M) \ ?$$

$E \neq \phi$, ЗАТВОРЕН, КОНВЕКСАН $\left(\Leftrightarrow \begin{matrix} x,y\in E \\ \alpha x + (1-\alpha)y \in E \end{matrix} \ \forall \alpha \in (0,1)\right)$

ТВРЂЕЊЕ: $\exists!\, x_0$ на минималном растојању.
(постоји тачно једно x_0 минималне норме)

Ако $0 \in E$, готово.

Ако не, постоји $\inf_{x\in E} \|x\| = \delta > 0$ (затвореност)

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \geq \delta$$

$$\boxed{\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2} \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2$$

Ако $\exists x_0$, тривијално је јединствен.

низ (x_n) $\|x_n\| \longrightarrow \delta$

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\delta^2$$

$\|x_n\|^2 \leq \delta+\varepsilon$, $\|x_m\|^2 \leq \delta+\varepsilon$

$\Rightarrow$ $\|x_m - x_n\|^2 < \varepsilon$ $n,m \geq n_0$ КОШИЈЕВ НИЗ!

$x_n \longrightarrow x_0 \in E$ ($x_n \in E$)

$M \leq H$, $\exists$ $P : H \to M$

$Q : H \to M^{\perp}$

($M^{\perp}$ ЈЕ УВЕК ПОДПРОСТОР)

НОТАЦИЈА ИЗ ЛИН

$$x = \underset{\in M}{P \cdot x} + \underset{\in M^{\perp}}{Q \cdot x}$$

$$\|x\|^2 = \|P \cdot x\|^2 + \|Qx\|^2$$

$M \neq H \iff \exists\, y \neq 0 \ldots, y \in M^{\perp}$

$x \in H$, $x + M = E$ (пратенимо (T))

Q_x

$$p_x = \underbrace{x - Q_x}_{\in M} \in x + M$$

$\langle Q_x, y \rangle = 0$ ДОКАЖИМО!

$\forall y \in M$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ и $\|y\| = 1$ (због рачуна)

$$\|Q_x\|^2 \leq \langle Q_x - \alpha y, Q_x - \alpha \cdot y \rangle = \|Q_x\|^2 + |\alpha|^2 - \alpha \langle y, Q_x \rangle - \bar{\alpha} \langle Q_x, y \rangle$$

$$\alpha = \overline{\langle y, Q_x \rangle}$$

$$0 \leq |\langle y, Q_x \rangle|^2$$

$$|\langle y, Q_x \rangle| \leq 0$$

ОГРАНИЧЕН ЛИНЕАРНИ ОПЕРАТОР

$A : X \to Y$. $\sup\limits_{\underbrace{x \in X \setminus \{0\}}_{\|x\| = 1}} \dfrac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \|A\|_{X \to Y}$

НОРМА ИЗ Y

НОРМА ИЗ X

НОРМА У ПРОСТОРУ ПРЕСЛИКАВАЊА

$$\|Ax - Ay\|_Y \leq \|A\| \cdot \|x - y\|$$

ОГРАНИЧЕНОСТ ЛИН. ОПЕРАТОР ТО ЈЕ ЕКВИВАЛЕНТНО НЕПРЕКИДНОСТИ.

$\forall \varepsilon\ \exists \delta$ $\|x - y\|_X < \delta \Rightarrow \|Ax - Ay\|_Y < \varepsilon$

$$\frac{\|Ax - Ay\|}{\|x - y\|} = \frac{\|A(x - y)\|}{\|x - y\|} \qquad \|A\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$$

$f(x) = \langle x, y \rangle$

$f: X \to \mathbb{C}$

$\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq \|y\|$

$\sup \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|y\|$

РИСОВА ТЕОРЕМА (ЗА ХИЛБЕРТА)

(СВИ ФУНКЦИОНАЛИ СУ ОВАГ ОБЛИКА)

(1)

$f: H \to \mathbb{C}$, непр.

$\exists! y \quad f(x) = \langle x, y \rangle$

$\|f\| = \|y\|$

$f_{y_1} + f_{y_2}$

$\alpha f_y = f_{\bar{\alpha} y}$

ЈЕДИНСТВЕНОСТ.

$\langle x, y_1 \rangle = \langle x, y_2 \rangle$

$x \perp y_1 - y_2$

$f \equiv 0, \quad y = 0$

$f \neq 0, \quad M = \{x \mid f(x) = 0\}$

$M \neq H, \quad \exists y \neq 0, \; y \in M^{\perp}, \; \|y\| = 1$

$H = M \oplus M^{\perp}$

$f\big(\underbrace{f(x)\, y - f(y)\, x}_{\in M}\big) = f(x) \cdot f(y) - f(y) \cdot f(x) = 0$

$\Rightarrow \quad \in M^{\perp}$

$\Rightarrow \quad \langle f(x) \cdot y - f(y) \cdot x, \; y \rangle = 0$

$f(x) \cdot \langle y, y \rangle - f(y) \cdot \langle x, y \rangle = 0$

$f(x) = f(y) \cdot \langle x, y \rangle = \langle x, \overline{f(y)} \cdot y \rangle$

ШТОСИТ